SU ALCUNE FORMULAZIONI MATEMATICHE DELLA COMPLESSITÀ

Stefano Isola

Per lungo tempo, qualificare qualcosa in termini di complessità è servito essenzialmente ad indicare una difficoltà di comprensione o di realizzazione. Accanto a quest'uso negativo, l'invocazione della complessità ha spesso assunto il carattere di una pseudo-spiegazione, ha cioè consentito, e talvolta consente tuttora, di giustificare l'assenza di una teoria e di supplire in qualche modo all'insufficienza delle spiegazioni. Un elemento importante nella storia recente delle scienze della natura è costituito dal fatto che la complessità, cessando di essere una pura invocazione, sia divenuta un *problema*, un oggetto di studio in sé e per sé.

Un po' schematicamente possiamo dire che la complessità, come il caos, si oppone all'ordine, alla semplicità. D'altra parte, mentre esiste una definizione matematica precisa di che cosa sia un sistema caotico, è meno evidente che cosa significhi per un sistema essere "complesso". In particolare risulta assai arduo immaginare una definizione, che possa essere formalizzata matematicamente, in grado di contenere tutti i significati che normalmente associamo a questa parola. Talvolta può essere difficile persino mettersi d'accordo sul carattere intuitivamente semplice o complesso di qualcosa. Possiamo facilmente trovarci tutti partecipi dell'intuizione che la struttura di una fuga di Bach sia più complessa tanto della mera successione delle note lungo la scala cromatica quanto di una successione "casuale" di note, prodotta ad esempio da una scimmia che percuote la tastiera di un pianoforte. Ma non accadrà necessariamente lo stesso se al posto della fuga bachiana mettiamo una composizione musicale ispirata alla libera atonalità. Non fosse altro che per il fatto che l'educazione e la concentrazione necessarie alla penetrazione con l'ascolto di un'opera siffatta sono difficilmente reperibili. La semplicità o la complessità attribuita ad un oggetto può essere spesso ingannevole. Chiunque abbia un po' di talento culinario sa bene quanto nascosta possa essere la complessità, nel senso del numero d'ingredienti, della difficoltà e della durata delle operazioni necessarie alla loro elaborazione, nella preparazione di una pietanza che magari, una volta presentata ai commensali, può apparire semplice. O al contrario quanto semplice possa essere la preparazione di un piatto che si presenta con grande effetto scenografico. In questo senso, un indicatore della complessità essenziale (cioè non apparente) di qualcosa è dato dalla difficoltà della sua costruzione.

I tentativi di dare definizioni formali della complessità sono invenzioni relativamente recenti, ispirate per lo più dalla teoria dell'informazione e dalla scienza dei calcolatori. In questo contesto, come vedremo, la "complessità" di un oggetto ha acquisito appunto il significato operazionale di minimo "sforzo" necessario a riprodurre l'oggetto in questione.

La necessità di una tale definizione è stata presentita forse per la prima volta da John von Neumann nel 1948, quando osservava:

«Siamo tutti portati a sospettare, seppure in modo vago, l'esistenza di un concetto [scientifico] di "complicazione". Tale concetto e le sue presunte proprietà non sono mai stati chiaramente formulati».[1]

[1] A. H. Taub, «The general and logical theory of automata», in *John von Neumann. Collected works. Vol. V. Design of Computers, Theory of Automata and Numerical Analysis*, Macmillan Co., New York 1963, p. 312.

Per "complicazione" von Neumann intendeva presumibilmente l'etereogenità dei costituenti di un sistema, nella fattispecie un *automa*,[2] e delle loro interazioni.

Poco più avanti, von Neumann, discutendo le proprietà formali degli automi che generano altri automi, ipotizzava l'esistenza di

[2] Un automa è un sistema astratto del quale è possibile dare una definizione rigorosa dei suoi costituenti e delle sue prestazioni. Concretamente, possiamo pensare a una "scatola nera" al cui interno vi sia un qualche dispositivo che può assumere un certo numero di "stati", ad esempio le posizioni di una ruota dentata, la collezione delle configurazioni "attivo-disattivo" di un insieme di relé, o altro ancora. Tale automa sarà poi in grado di "interagire" con l'ambiente in cui si trova, generalmente costituito da altri automi o da componenti di essi, per mezzo di istruzioni scritte di ingresso e di uscita, o anche, in certi casi, con operazioni meccaniche di vario tipo. Lo stato in cui si trova l'automa in ogni istante di tempo sarà determinato per mezzo di regole precise dalle informazioni ricevute dall'esterno e dal suo stato all'istante precedente. Un esempio di automa che riproduce le proprietà essenziali di una macchina calcolatrice universale, cioè in grado di eseguire qualsiasi procedura di calcolo, è la *macchina universale di Turing*, e verrà discusso più avanti. Le interazioni con l'esterno, cioè l'ingresso e l'uscita, di una macchina calcolatrice si riducono essenzialmente a liste di istruzioni, ad esempio sequenze di 0 e 1. Più in generale, von Neumann si interessò ad automi la cui uscita fosse costituita da altri automi. L'idea di Turing della macchina calcolatrice *universale*, cioè in grado di simulare qualunque altra macchina calcolatrice, veniva così estesa ad automi che possono riprodurre altri automi e che, in particolare, possono autoriprodursi. Questi ultimi, nel programma di von Neumann, avevano prevalentemente lo scopo di simulare le proprietà di certi sistemi biologici, in particolare del cervello. Il funzionamento del cervello non sembra essere molto perturbato dal fatto che ogni giorno un gran numero di neuroni muoia senza essere rimpiazzato da altri neuroni, o dal fatto che si producano continuamente cambiamenti di stato a livello chimico-fisico. Evidentemente, se perturbazioni dello stesso ordine si producessero nelle macchine elementari abituali, si pensi a un motore a scoppio, queste smetterebbero immediatamente di funzionare. Questo tipo di osservazione aveva spinto von Neumann a studiare macchine il cui comportamento globale fosse più "robusto", cioè affidabile, di quello dei loro costituenti. Osserviamo che inizialmente egli concepiva l'idea di autoriproduzione nel senso che, dato un insieme ben definito di componenti elementari (una dozzina circa), «è possibile costruire mediante tali componenti un aggregato [l'automa appunto] il quale, una volta posto in un ambiente in cui abbondano tali elementi, cominci a costruire altri aggregati, ciascuno dei quali risulterà alla fine perfettamente identico all'originale» (*ibid*). Più tardi il nostro autore è passato da questo modello pseudo-meccanico a una struttura di autoriproduzione più astratta, basata su una disposizione bidimensionale di "cellule" elementari, analoga agli *automi cellulari* studiati di recente in modo intensivo (vedi più avanti). L'autoriproduzione consiste nel fatto che un gruppo di cellule contigue può comportarsi, in condizioni opportune, come un'unità organica e operare sulle vicine cellule in stato di riposo, in modo tale da organizzare un gruppo di esse in un'identica unità. Questo secondo modello oltre a consentire una formulazione matematica più semplice, «presenta alcune analogie con vari problemi chimici e biologici, quali quelli della riproduzione dei cristalli e dei geni, mentre il modello precedente è più strettamente connesso col problema della riproduzione animale su larga scala» (Cfr. C. E. Shannon, «Proceedings of the Institute of Radio Engineers» in *Computers and Automata*, New York 1953, vol. 41, p. 1240).

una *soglia* di complicazione, al di sotto della quale un automa poteva solo produrre automi meno complicati di lui, ma al di sopra della quale diviene possibile che un automa possa riprodurre se stesso o addirittura entità più complicate.

«Questo fatto, cioè che la complicazione, così come l'organizzazione, al di sotto di un certo grado minimo sia degenerativa, e al di sopra di tale grado divenga autosostenuta e persino in grado di amplificarsi, giocherà evidentemente un ruolo importante in ogni teoria futura su questi problemi».[3]

Dunque, in primo luogo, egli poneva come principio che il superamento di una certa soglia di complessità di un sistema artificiale come un automa, gli permettesse di generare effetti più complessi della sua stessa struttura. Ciò potrebbe apparire come un circolo tautologico: definire la complessità per mezzo della complessità. In realtà dobbiamo tener conto che è stato introdotto un elemento *operativo*, in questo caso il postulato di una soglia in un processo generativo in cui si parla di complessità senza ancora sapere che cosa sia la complessità, il quale produce un leggero spostamento della tautologia in un processo di chiarificazione a spirale. Vedremo come ciò sia in qualche modo costitutivo di qualunque approccio rigoroso al problema della complessità. In secondo luogo, dall'osservazione precedente traspare anche l'idea che la complessità di un automa dovesse essere messa in relazione con quella di un altro automa in grado di riprodurlo. Un'effettiva formalizzazione di quest'idea di complessità come "complessità di fabbricazione" venne data negli anni '60 da Kolmogorov e Chaitin. Ma prima di addentrarci in un esame delle definizioni "classiche" sono necessarie alcune osservazioni.

La possibilità stessa di dare una definizione formale di complessità di un oggetto presuppone che tale oggetto sia "formalizzabile". Nel caso degli automi studiati da von Neumann, si tratta ovviamen-

[3] *op. cit.*, p. 318.

te di oggetti già formalizzati in partenza. D'altra parte, un particolare automa può a sua volta costituire un modello matematico astratto di un oggetto da indagare. Ciò può accadere ad esempio quando l'oggetto in questione sia riconducibile ad un insieme di "proprietà" espresse in un *linguaggio formale*.[4] Se ad esempio l'oggetto è la struttura di una sequenza di DNA, cioè la successione delle coppie di basi che la compongono (adenina = A, citosina = C, guanina = G, timina = T), il successo di una simile operazione, per altro ancora molto lontano, consisterebbe nella costruzione di un automa, o equivalentemente di un linguaggio formale, in grado di "riconoscere", e dunque di riprodurre, le regole "grammaticali" che governano la successione delle basi lungo la sequenza. Ciò fornirebbe evidentemente una "spiegazione" della struttura della sequenza di DNA, in altre parole potremmo dire di aver "compreso" il nostro oggetto d'indagine, o perlomeno alcune sue regole strutturali.[5]

Qualcuno potrebbe dire che una volta spiegato un oggetto non è più complesso. Ciò equivale ad attribuire alla nozione di complessità un carattere puramente gnoseologico, pensarla cioè *unicamente* come un attributo della conoscenza, o meglio della non-conoscenza, di un oggetto da parte di un soggetto. A mio avviso, questo punto di vista, se assunto come punto di partenza, non porta a cogliere gli aspetti veramente interessanti della pratica scientifica contemporanea che a tale nozione possono essere associati. Al contrario, come vedremo, è proprio il *tentativo* di stabilire nozioni "oggettive" ed "operative" della complessità, come cioè di una "grandezza" misurabile da attribuire ad un oggetto d'indagine, che provoca l'aper-

[4] Un linguaggio formale può essere definito come l'insieme di tutte le configurazioni simboliche, cioè delle sequenze di simboli scritte in un qualche alfabeto finito, che un dato automa può generare. Un linguaggio formale si oppone al linguaggio naturale per il fatto che la sintassi vi è strettamente definita. In altre parole, la corrispondenza tra i simboli, le parole, ecc., ed il loro significato, ossia il modo di usarli per formare le parole, le frasi, ecc., è priva di qualsivoglia ambiguità. Proprio questo fatto rende un linguaggio formale una struttura totalmente priva di contenuto semantico *a priori*, e quindi suscettibile di determinare nel modo più rigoroso un modello formale analizzabile matematicamente.

[5] Un altro aspetto importante sarebbe la conoscenza delle sue proprietà *statistiche*, ossia delle frequenze di apparizione delle varie sottosequenze, più o meno elementari, che compongono l'intera sequenza.

tura di scenari insospettati sul significato di *comprendere* un insieme di osservazioni. In effetti, da una parte abbiamo visto che il tentativo di spiegare il comportamento osservabile di un sistema richiede preliminarmente la sua "riduzione" all'interno di un quadro concettuale astratto, dove cioè tali osservazioni possano essere manipolate per mezzo di strumenti teorici. Niente di nuovo in questo. Ma è altresì evidente che quando si abbia a che fare con un sistema complesso (qualunque sia il significato preciso che attribuiamo a questa parola), la selezione *a priori* delle "proprietà rilevanti", cioè di quali siano le "buone domande" da porre, gioca un ruolo essenziale.[6] Nel suo libro *La science et l'hypothèse*, Poincaré osservava:

«È dunque grazie all'approssimativa omogeneità della materia studiata dai fisici che la fisica matematica ha potuto nascere. Nelle scienze naturali, non ritroviamo più quelle condizioni di omogeneità, di indipendenza relativa delle parti lontane, di semplicità dei fatti elementari, ed è per questo che gli studiosi di queste scienze debbono ricorrere ad altri modelli di generalizzazione».

Oggi, a circa un secolo di distanza, buona parte degli "oggetti" più interessanti che proprio la fisica matematica tenta di studiare non hanno quelle caratteristiche che Poincaré poneva all'origine dell'idealizzazione fisico-matematica delle cose.[7] In particolare, tra gli oggetti che vengono generalmente considerati complessi, e la cui stessa complessità è sovente oggetto d'indagine, troviamo la turbolenza nei fluidi, i processi di reazione-diffusione, i sistemi dinamici caotici, gli automi cellulari, i fenomeni critici, in particolare sistemi disordinati o vetrosi, i quasi-cristalli. Vi sono poi quei sistemi

[6] Una discussione più dettagliata su questo punto si può trovare in S. Isola, «Understanding complex behaviour. Some remarks on method and interpretation», in R. Livi, S. Ruffo, S. Ciliberto e M. Buiatti, *Chaos and Complexity*, World Scientific, 1988.

[7] Anche se sarà poi lo stesso Poincaré tra i primi a discutere esplicitamente concetti come quello di "caos deterministico", che si trovano alla base della problematizzazione contemporanea dei fenomeni complessi (vedi più avanti, nota 10).

che in un senso un po' vago si possono considerare prossimi alla linea di confine tra vivente ed artificiale, mi riferisco a certe classi di automi studiati nell'ambito dell'intelligenza artificiale, come le reti di neuroni ed altri dispositivi in grado di riprodurre, formalmente, *alcune* proprietà dei sistemi viventi, come la riproduzione, la crescita, la metabolizzazione e/o l'apprendimento (nel senso di elaborazione di materiale e/o informazione proveniente dall'esterno del sistema). Ma perché questi sistemi vengono considerati "complessi"? Vediamo come certe caratteristiche generali comuni a tutti questi esempi possono essere individuate all'"origine" di un comportamento complesso, e costituire così una guida per la formulazione di "buone domande".

In primo luogo, un sistema "complesso" è generalmente composto da molte *parti*, anche se questa proprietà non è sufficiente di per sé. Ad esempio, un certo volume di gas perfetto non è più complesso del cervello umano anche se può avere più molecole di quanto il cervello non abbia neuroni. Vale osservare come dal punto di vista della modellizzazione matematica il concetto di "numero di parti" o "numero di componenti" di un sistema non abbia una rilevanza definitiva. Lo stato di un sistema composto di molte (anche infinite) componenti può essere talvolta rappresentato con un singolo numero reale. Inversamente, un sistema composto da un solo punto può subire un'evoluzione "complessa" che può essere caratterizzata ad esempio specificando il valore assunto da un numero relativamente elevato di indicatori. In questo senso, l'essere composto da molte parti non solo non è sufficiente ma non è neppure necessario per la "complessità". Quello che conta è la mutua *interazione* o *correlazione* tra le parti. Inoltre, per quasi tutti gli esempi citati, tale interazione ha la proprietà di essere "invariante per traslazione", ossia non dipende da quale "parte" o da quale particolare insieme di componenti del sistema stiamo osservando.[8]

[8] Nell'ambito delle cosiddette scienze sociali, un "sistema" che può presentare caratteristiche qualitative di elevata complessità è l'economia di una comunità, considerata a diversi stadi di sviluppo tecnologico. Osserviamo tuttavia che i cicli e le fluttuazioni di un sistema economico hanno luogo inevitabilmente su un fondo generale di crescita. È appunto questo

Così, ad esempio, un *sistema dinamico discreto*, è definito da una legge di evoluzione che ad ogni istante di tempo determina lo stato del sistema come funzione unicamente dello stato all'istante precedente. In questo caso dunque si ha invarianza per traslazione temporale. Un esempio dove si ha invarianza spaziale è dato dall'insieme degli spin degli atomi di un cristallo ferromagnetico. Infine, un *automa cellulare*, è composto da un insieme (una sequenza lineare, un reticolo bidimensionale o altro ancora) di "cellule discrete", cioè di componenti che possono assumere soltanto un numero finito di "stati" (contrassegnati da un numero, da una lettera, da un colore o altro) e che "interagiscono" tra di loro a mezzo di "regole" fissate una volta per tutte e identiche per ogni componente. Ad ogni generazione, una data cellula assume uno stato che dipende soltanto dal suo stato e da quello delle cellule con le quali interagisce, alla generazione precedente, secondo una certa prescrizione. Qui l'interazione è invariante per traslazione spaziale e temporale. Nel *Gioco della vita*, ad esempio, che ha luogo su una scacchiera bidimensionale, ciascuna "cellula" può assumere lo stato "morto" (contrassegnato ad esempio dal colore bianco), oppure "vivo" (nero) ed interagisce soltanto con se stessa e con le sue otto cellule vicine. Ad ogni generazione, una data cellula sarà viva se alla generazione precedente tre o quattro delle nove cellule che compongono il suo vicinato erano vive, muore in caso contrario (cioè per sovraffollamento o per desolazione). E questa "regola" è la stessa per tutte le componenti del sistema e per tutte le generazioni.

Ora, uno degli scopi di una teoria scientifica sarà a questo punto quello di *classificare* gli *stati* del sistema, cioè le sue configurazioni globali nello spazio o nel tempo, o in entrambe le dimensioni,

che rende così difficile un'analisi quantitativa di tali processi in termini delle idee e delle tecniche che verranno brevemente discusse qui. Ad esempio, l'analogia con un sistema fisico dissipativo in cui venga immessa, a gradi diversi, energia dall'esterno (ad esempio uno strato di fluido viscoso riscaldato dal basso) è molto forte. Ciò suggerisce uno scenario in cui, al crescere dello sviluppo tecnologico, si osserva il passaggio da un comportamento a "cicli" ad un comportamento "turbolento", con fluttuazioni irregolari ed ampiamente imprevedibili (questo sembra proprio essere lo stato attuale dell'economia mondiale). D'altra parte, anche per i motivi elencati sopra, molte conclusioni con tutta evidenza verosimili che si possono trarre da tale analogia non riescono ancora a trovare una conferma quantitativa.

che possono determinarsi a partire dalla sua configurazione iniziale e dalle interazioni tra le sue parti.

Può ad esempio accadere che lo stato del sistema sia descrivibile in modo "semplice", cioè in termini di configurazioni *costanti*, in cui tutte le componenti fanno la stessa cosa, o configurazioni *periodiche*, in cui la variabilità del comportamento delle componenti è organizzata in strutture ripetitive, sempre uguali. Oppure si possono verificare situazioni di "complessità apparente", in cui a seguito di un'indagine più approfondita, lo stato del sistema è riconducibile a un'opportuna *sovrapposizione* di configurazioni periodiche. Ma un punto importante del nostro discorso, e ciò che contribuisce a determinare la novità e l'interesse di alcuni aspetti dell'indagine scientifica contemporanea, è che, molto più spesso di quanto si possa immaginare, gli stati di sistemi come quelli menzionati più sopra appaiono irriducibilmente *caotici* ed *imprevedibili*. Con ciò intendiamo il fatto che un mutamento, anche piccolissimo, della configurazione di partenza, produrrà dopo poco tempo differenze macroscopiche nello stato del sistema. Questa proprietà, di cui vedremo più avanti un esempio concreto, prende il nome di *dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali* e sta alla base della comprensione dei sistemi che presentano *caos deterministico*.[9] Ma la fenomenologia della complessità non si esaurisce nel carattere caotico e dunque imprevedibile del comportamento di un sistema. Una caratteristica importante che si osserva spesso è la compresenza di strutture "ordinate" distribuite in modo apparentemente irregolare in un "mare" di disordine indiscernibile. Troviamo qui due elementi essen-

[9] Con ciò si intende appunto il fatto che evoluzioni temporali rette da "leggi" perfettamente deterministiche possano nondimeno dar luogo a comportamenti imprevedibili ed irregolari, al punto da renderle indistinguibili da evoluzioni puramente governate dal *caso*. La constatazione della *possibilità logica* di tale fenomeno era stata già chiarita da Hadamard alla fine del secolo scorso, e discussa da Poincaré nel suo libro *Science et Méthode*. Progressivamente, ci si è poi resi conto che questo fenomeno poteva prodursi non solo in situazioni particolari (Poincaré si riferiva alla previsione metereologica), ma in modo assai generale ogni volta che le "leggi" che governano la dinamica abbiano un carattere *non lineare*. Per una discussione recente di queste idee (scevra dai deliri di onnicomprensione che si verificano puntualmente sull'onda degli effetti di moda) rimandiamo al libro di David Ruelle, *Hasard et chaos*, Ed. Odile Jacob, Paris 1991.

ziali che intervengono ogni volta che si voglia parlare di complessità: l'*eterogeneità* e l'*organizzazione*. Si parla talvolta di complessità *autogenerata o emergente*, quando l'eterogeneità delle configurazioni osservate mostra proprietà "globali" di organizzazione non riconducibili alle semplici regole o alle interazioni "locali".[10] In molti casi, ad esempio nella modellizzazione di fenomeni di turbolenza o in certi sistemi dinamici caotici, queste strutture ordinate risultano organizzate in *gerarchie* difficili da descrivere perché in qualche modo situate tra ordine e disordine, in cui diverse *scale* spaziali o temporali entrano naturalmente in gioco. Conseguentemente, una descrizione appropriata di questi sistemi richiede sovente un discorso strutturato su diversi *livelli* – dal microscopico al macroscopico, dal molecolare al funzionale, ecc. – mettendo in gioco irriducibilmente l'abilità analitica dell'osservatore ma anche la sua particolare idea di che cosa significhi *comprendere* quel dato sistema.

Infine, l'indagine di un sistema complesso è un processo che spesso comporta la considerazione delle sue correlazioni interne *e* di quelle con il suo ambiente circostante, correlazioni queste ultime che ne determinano in un certo senso la *funzione*. Ad esempio, la

[10] Un esempio importante e molto studiato di questo fenomeno è fornito dalla *convezione termica* nei fluidi. Un esperimento particolare (convezione di Rayleigh-Bénard) consiste nel mantenere una certa differenza di temperatura tra due piastre piane in mezzo alle quali si trova un fluido viscoso. Se la differenza di temperatura è abbastanza elevata, si instaura un regime di trasporto convettivo in cui il fluido si "organizza" in strutture cilindriche (*roll*), dove il fluido caldo parte dalla piasta inferiore, raggiunge quella superiore, perde calore e discende nuovamente verso la piastra inferiore, ivi riacquista calore ed il processo riparte da capo. Un'altra situazione è data dai cosiddetti *fenomeni critici*, in cui si osserva l'insorgenza di *correlazioni di lunga portata* anche quando le interazioni locali sono di portata breve. Un esempio importante si osserva nella transizione tra la fase paramagnetica e la fase magnetizzata in un cristallo ferromagnetico, ad esempio il rame, ottenuta "raffreddando" sufficientemente il sistema, cioè portandolo al di sotto di una certa temperatura critica. Avvicinandosi alle condizioni critiche, uno scenario tipico che si osserva in questi fenomeni è caratterizzato dalla compresenza delle differenti fasi, organizzate in "isole ordinate" sempre più grandi, all'interno di ciascuna delle quali il comportamento del sistema tende appunto ad essere fortemente correlato. D'altra parte, queste due classi di esempi, se anche presentano caratteristiche sorprendenti di organizzazione strutturale, non sempre producono l'eterogeneità necessaria a qualificarli come complessi. Quest'ultima caratteristica può forse essere individuata nella dinamica di un fluido turbolento, o ancora in particolari sistemi, noti come *vetri di spin*, caratterizzati dalla compresenza di molte fasi.

complessità "effettiva" di una sequenza di DNA non si riduce alla sua *struttura*, data dalle correlazioni tra le coppie di basi che la compongono, cioè alle regole "grammaticali" che governano la successione delle basi lungo la sequenza, ma anche dalla sua *funzione*, ossia la sua capacità di interagire con un apparato di trascrizione e traduzione, apparato che a sua volta interagisce con il resto dell'organismo il quale, infine, interagisce con l'ambiente in cui si trova a vivere.

Da queste osservazioni sparse si possono dedurre una quantità di definizioni *verbali* della complessità, ciascuna associata ad un particolare modo di metterla in relazione con altre nozioni più o meno ben definite, come l'ordine, il disordine, l'informazione, la struttura gerarchica, l'organizzazione funzionale, o altro ancora, e che potrebbero eventualmente candidarsi per una formalizzazione rigorosa. Ad esempio potremmo dire che la complessità è un disordine apparente nel quale supponiamo esistere un ordine nascosto; oppure che la complessità è un ordine di cui non si conosce il codice; o che la complessità è la difficoltà di estrarre l'informazione contenuta in un sistema; o ancora che la complessità è determinata dalla creazione di un significato funzionale nel passaggio da un livello di organizzazione (o di descrizione) ad un altro.[11] Osserviamo tuttavia che in tutte queste caratterizzazioni, *la complessità presenta il carattere duplice di proprietà osservabile nel comportamento di un oggetto e di caratteristica del processo di comprensione di tali osservazioni da parte di un soggetto*.[12] Tutto ciò mette in gioco inevitabilmente la nozione di *significato*. Ma quest'ultimo,

[11] Un'analisi sottile di queste diverse accezioni nel contesto della descrizione del vivente si trova nel libro di H. Atlan, *Tra il cristallo e il fumo*, Hopefulmonster, Firenze 1986. Per farsi un'idea di quanto variegati possano essere i tentativi di dare definizioni con un qualche riscontro quantitativo si veda ad esempio L. Peliti e A. Vulpiani, *Measures of Complexity*, Lecture Notes in Physics 314, Spriger-Verlag 1987; e anche i rendiconti del colloquio di Cerisy contenuti in *Les théories de la complexité*, Editions du Seuil, Paris 1991.

[12] Ad esempio, la capacità di comprendere un testo, e il piacere che ne deriva, richiede un certo tipo di correlazione tra il testo e il lettore, ed è un processo che al suo grado più basso può consistere in poco più che la comprensione delle regole grammaticali della lingua in cui è scritto, ma che tuttavia può raggiungere livelli di grande "complessità" (*Finnegan's Wake*).

nella sua accezione più generale, si guarda bene dall'essere una nozione formalizzata all'interno di una teoria scientifica. In effetti, come vedremo, esistono alcune definizioni della complessità che hanno ricevuto un certo grado di formalizzazione proprio al prezzo di non considerare esplicitamente questioni di significato, cioè senza preoccuparsi di sapere in che modo noi comprendiamo né come i significati vengano creati.

«Occorre rendersi conto che il valore della scienza risiede nelle buone risposte (se possibile semplici) che essa può dare, piuttosto che nella profondità dei problemi di cui potrebbe occuparsi. Il problema del senso e del significato è evidentemente un problema profondo e complesso. Tra le altre cose, esso è legato al problema del funzionamento del nostro cervello, cosa di cui sappiamo assai poco. Non c'è dunque da meravigliarsi se la scienza di oggi si faccia carico solamente di aspetti superficiali del problema del significato. Uno di tali aspetti è lo studio della quantità d'informazione».[13]

Ispirati da questa osservazione di Ruelle, fissiamo dunque un punto vista operativo che forse a qualcuno potrà apparire riduttivo ma che di fatto ha aperto, e continua ad aprire, scenari affascinanti ed insospettati. In senso generale e senza coinvolgere esplicitamente questioni di significato, diremo che la complessità di un "oggetto" risulta dalla difficoltà nell'eseguire un qualche "compito" relativo a tale oggetto. Ad esempio tale compito può consistere nel determinare una descrizione minimale dell'oggetto. Oppure il compito può esemplificarsi nel fatto di dover "ricostruire" l'oggetto, ovvero predire esattamente le sue caratteristiche, a partire da una sua descrizione minimale. Da questo punto di vista, esamineremo alcuni aspetti più quantitativi dell'approccio alla complessità. In particolare, cercheremo di descrivere le idee essenziali che intervengono quando quest'ultima venga studiata entro due prospettive diverse: quella della teoria dell'informazione, e dunque in

[13] D. Ruelle, *op. cit.*, p. 177.

termini *statistici* o *probabilistici*, e quella della teoria dei calcolatori, ossia in termini *computazionali* o *algoritmici*. All'interno di queste due prospettive, e in modo diverso nell'una e nell'altra, vedemo come lo spettro del significato si ripresenti in forma surrettizia nella problematizzazione, o forse sarebbe meglio dire la drammatizzazione, dell'idea di *caso*. Nella prima prospettiva ciò che gioca un ruolo chiave è il legame tra caso ed impredicibilità, nella seconda tra caso ed incompletezza.

Per cominciare ad essere più precisi scegliamo un tipo particolare di *oggetto*, per altro molto "classico" e al quale molti sistemi che cadono sotto l'indagine scientifica possono essere in qualche misura ricondotti: una sequenza di simboli provenienti da un qualche alfabeto finito. Può essere utile tenere presente alcuni esempi:

1) la successione di risultati di misure eseguite ad intervalli di tempo regolari su di un evento che si produce in qualche esperimento reale;

2) la successione di numeri generati da un calcolatore a mezzo di un dato programma di calcolo;

3) la successione delle basi nel codice genetico (DNA) di un essere vivente;

4) la successione degli stati microscopici degli spin degli atomi di un cristallo ferromagnetico misurati lungo una retta tracciata nel cristallo;

5) la successione dei valori assunti, ad intervalli di tempo equispaziati, da un qualche indicatore macroeconomico, come ad esempio l'indice Dow-Jones;

6) la successione delle lettere dell'alfabeto in un testo scritto in una delle lingue parlate sul nostro pianeta;

7) la successione degli stati in una configurazione di un automa cellulare ad un dato istante di tempo.

Per rendere le cose ancor più semplici supponiamo che la sequenza sia scritta nell'alfabeto più elementare immaginabile, cioè l'alfabeto binario[14] composto da 0 e 1. La nostra sequenza sarà dunque del tipo

$$1\,0\,0\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,1\,0\,1\,0\,1\,1\,1\,0\,0 \ldots \qquad (1)$$

dove i puntini di sospensione indicano che, a priori, possiamo immaginare che la nostra successione abbia lunghezza infinita. Supponiamo che ad analizzare questa sequenza non siamo noi in carne ed ossa ma un *demonietto* che ad ogni istante, muovendosi da sinistra a destra, legge un nuovo simbolo e lo aggiunge alla sequenza letta fino a quel momento, e che non abbia altri canali d'informazione sensoriale. Essendo un demone vivrà in eterno e alla fine dei tempi avrà dunque accumulato una successione infinita di 0 ed 1. Potremo allora chiedergli se ciò che ha letto abbia un qualche senso, se presenti delle regolarità, e di comunicarci i suoi risultati sotto forma di una "recensione ottimale", ovvero di una nuova sequenza scritta, eventualmente anche in un altro alfabeto, che contenga tutte le proprietà strutturali della sequenza in esame nella forma più sintetica possibile. In particolare, dovrà essere possibile per un altro demonietto utilizzare questa informazione minimale per poter ricostruire la sequenza di partenza. La risposta sarà evidentemente molto semplice se la sequenza in questione è costituita da una successione costante di tutti zeri o tutti uno, o anche da una mera ripetizione periodica di una "parola" fondamentale, come ad esempio:

$$0\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,0 \ldots \qquad (2)$$

Anche in questo caso, infatti, le "leggi" che regolano l'oggetto in questione sono comunque molto semplici: dopo 0 viene 1, dopo 01 viene 1, dopo 11 viene 0.

All'estremo opposto, possiamo immaginare il nostro demonietto alle prese con una sequenza "puramente casuale", dalla quale cioè

[14] È spesso possibile ricondurci a questa situazione nei casi considerati sopra attraverso un'opportuna codifica ulteriore. Ad esempio, nel caso di un testo scritto in una lingua qualsiasi, la codifica può effettuarsi a mezzo dell'alfabeto Morse.

non riesce ad estrarre né una regolarità, né un senso. L'unico "meccanismo" che egli può inferire all'origine di una sequenza siffatta è quello di una successione di lanci di una moneta (non truccata), in cui l'occorrenza "testa" sia, ad esempio, codificata dal simbolo 0, e "croce" dal simbolo 1. Evidentemente, anche dopo aver osservato i risultati dei primi trenta lanci, non vi sarà alcun modo di predire se il trentunesimo lancio sarà 0 oppure 1. Per il demonietto, ciò implica che l'unico modo di "recensire" un qualunque spezzone della sequenza sarà semplicemente quello di riscriverla simbolo per simbolo. L'intera sequenza diviene dunque incomunicabile (a meno di non disporre del *Libro di sabbia* di Borges). Ciò ci fornisce una prima nozione di complessità, intesa come *contingenza* o *casualità*.

Statistica e sequenze aleatorie

Per poter iniziare a dare delle definizioni precise la prima fondamentale nozione da considerare è quella di *statistica* associata a una sequenza infinita. Questa nozione ci consentirà di dare una definizione di complessità misurabile in termini di *quantità d'informazione* o *entropia*, quali sono state definite nell'ambito della teoria dell'informazione. Matematicamente, si tratterà innanzitutto di contare il numero di volte $N(S_n,l)$ che una data sottosequenza S_n di lunghezza n compare nei primi l termini della sequenza S. Ad esempio, se S è la sequenza (1), $l = 30$ e $S_n = 010$ (dunque $n = 3$), allora si ha $N(S_n,30) = 3$ cosicché la *frequenza* della parola 010 nel tratto considerato è uguale a $N(S_n,l)/l = 3/30 = 1/10$. Infine dovremo determinare la quantità asintotica

$$f(S_n) = \lim_{l \to \infty} \frac{N(S_n,l)}{l} \tag{3}$$

che fornisce la probabilità (nel senso di frequenza limite di apparizione) di osservare il tratto, o la parola, S_n nella sequenza infinita S. Se ad esempio S è un testo idealmente infinito scritto in italiano (o nella sua codifica nell'alfabeto Morse), la successione di lettere "ere" ha una frequenza di apparizione positiva mentre "zcz" ha evidentemente frequenza nulla. Ora, se le quantità introdotte sopra sono ben definite, cioè se il limite esiste per ogni scelta della sottosequenza S_n, allora diremo che la nostra sequenza ha una *statistica definita.*

La statistica di una sequenza infinita S *è la collezione delle frequenze di apparizione in* S *di tratti di lunghezza finita.*

Inoltre una sequenza a statistica definita si dirà *ergodica* se, date due parole S_n e $\bar{S}_m$ la frequenza di apparizione di S_n seguita dopo k simboli dalla sequenza $\bar{S}_m$ è in media (al variare di k) uguale al prodotto delle frequenze di S_n e $\bar{S}_m$. In altri termini, se parole diverse sono in media distribuite indipendentemente sull'intera sequenza.[15] La nozione di statistica consente innanzitutto di dare una definizione di sequenza casuale:

Una sequenza infinita sarà detta casuale o aleatoria, nel senso di Borel, se tutte le sottosequenze finite di lunghezza data hanno la stessa probabilità di apparizione.

Ad esempio la sequenza (2) non può essere casuale poiché la parola 011 ha una frequenza limite di 1/3 (così come 110 e 101) e non 1/8 (vi sono 8 parole distinte di lunghezza tre). Più in generale, nessuna sequenza periodica può essere casuale.[16] D'altra parte Borel ha dimostrato che "quasi tutte" le sequenze sono aleatorie. Schematicamente, se consideriamo l'insieme (non-numerabile) di tutte le sequenze e ne scegliamo una "a caso", questa sarà certamente casuale (!) nel senso di Borel.

[15] Una discussione rigorosa e dettagliata di queste ed altre nozioni fondamentali si trova in G. Gallavotti, *Aspetti della teoria ergodica, qualitativa e statistica del moto*, Bologna 1981.

[16] In economia, la ricerca di "cicli", cioè di configurazioni periodiche, è appunto un modo di lottare contro la complessità.

Vale osservare a questo punto che la definizione di Borel può forse aver sistemato le cose per il demonietto, ma certamente non per noi, osservatori umani. Supponiamo che il nostro demonietto abbia pazientemente calcolato la statistica della sequenza in esame e stabilito che si tratta di una sequenza casuale. Possiamo, noi, esser certi che nel caso in cui volessimo "recensire" (o trasmettere) un suo tratto finito (sufficientemente lungo) non ci sarebbe possibile farlo in modo più economico che riscrivendolo simbolo per simbolo? A questo proposito consideriamo la sequenza (i tratti verticali servono soltanto da riferimento):

$$0\,|\,1\,|\,00\,|\,01\,|\,10\,|\,11\,|\,000\,|\,001\,|\,010\,|\,100\,|\,011\,|\,101\,|\,110\,|\,111\,|\,\ldots \qquad (4)$$

in cui tutte le combinazioni possibili di 0 e 1 vengono scritte in successione lessicografica, ossia con le combinazioni elencate in ordine di lunghezza crescente e, tra quelle della stessa lunghezza, in ordine alfabetico. Il matematico inglese Champernowne ha dimostrato che questa sequenza è aleatoria nel senso di Borel.[17] Pertanto, qualunque messaggio vi comparirà con una frequenza che dipende soltanto dalla sua lunghezza. Così, ad esempio, se trascrivessimo in alfabeto binario le avventure di Pinocchio, otterremmo un messaggio di lunghezza approssimativa 300000 (trecentomila simboli), che apparirà nella sequenza scritta sopra infinite volte con una frequenza pari a $1/2^{300000}$. D'altra parte, essendo evidente la sua *regola di costruzione*, questa sequenza è in effetti una mera contraffazione del caso: possiamo predire con assoluta esattezza quando potremo leggere Pinocchio per la prima volta, quando la seconda volta e così via. Si tratterà di tempi inimmaginabilmente grandi,

[17] L'idea della dimostrazione è per altro piuttosto semplice: dato un tratto finito S_n, questo apparirà con frequenza costante, uguale a 2^{-n}, all'interno di ciascun gruppo di simboli in cui tutte le combinazioni di uguale lunghezza, diciamo m, si succedono in ordine alfabetico, per ogni scelta di $m \geq n$ (la lunghezza di tale gruppo è uguale a $m \cdot 2^m$). La sola circostanza in cui la frequenza di apparizione di S_n può differire dal valore 2^{-n} si verifica quando S_n si trova o all'interno di un gruppo come sopra con $m < n$, o quando si trova "a cavallo" tra due gruppi successivi. D'altra parte non è difficile rendersi conto che tali eventi danno contributo nullo al calcolo della frequenza limite $f(S_n)$.

dell'ordine dell'inverso della frequenza scritta sopra,[18] ma il nostro demone ha l'eternità davanti a sé... Vediamo qui che l'evidenza di una regola costitutiva fa sparire di fatto ogni carattere aleatorio. Troveremo più avanti una definizione più restrittiva di complessità, nel senso di casualità, in grado di render conto di questa differenza. Un altro esempio interessante è quello di una sequenza generata da un meccanismo perfettamente deterministico ma che tuttavia "imita" perfettamente bene un processo casuale tipo lancio della moneta. Un semplice meccanismo di questo tipo può esse-

[18] Se ad esempio leggiamo alla velocità di 1 simbolo per secondo, allora potremo leggere Pinocchio per la prima volta tutto intero dopo un tempo dell'ordine di 2^{300000} secondi (approssimativamente, 1 seguito da 100000 zeri; esprimere questo tempo in anni invece che in secondi non migliora la difficoltà di immaginare numeri così grandi). Osserviamo che l'età dell'universo è stimata essere circa 15 miliardi di anni, ossia $15 \times 10^9 \times 365 \times 24 \times 3600 = 4{,}7 \times 10^{17}$ secondi. Se anche aumentassimo la velocità di lettura fino ad arrivare a un simbolo per millesimo di secondo le cose non cambierebbero granchè riguardo alla loro realizzabilità pratica: non arriveremmo a vedere Pinocchio diventare un ragazzino che dopo circa 10^{99997} secondi, un tempo ancora immensamente più grande della vita dell'universo. L'effetto di esplosione combinatoria a cui si assiste ogni volta che si combini un numero crescente di oggetti, ciascuno suscettibile di trovarsi in un certo numero di stati, costituisce un elemento paradigmatico nella problematizzazione dei fenomeni complessi. Un esempio classico è quello della struttura delle proteine, ossia i mattoni fondamentali di ogni organismo vivente. Le proteine sono dei polimeri lineari formati da sequenze di monomeri: gli aminoacidi (la cui struttura viene determinata dal codice genetico, il quale associa un singolo aminoacido ad ogni tripletta di basi nella sequenza del DNA). Vi sono venti tipi diversi di aminoacidi (in altre parole l'alfabeto delle proteine è di venti lettere) e la lunghezza di una proteina, cioè il numero di monomeri che la costituiscono, può variare da alcune centinaia fino ad alcune migliaia. Se facciamo l'ipotesi minimale che tutte le proteine siano composte di soltanto cento aminoacidi, otteniamo che il numero di possibili proteine differenti è pari a 20^{100}, cioè circa 10^{130}. Supponiamo ora di voler esplorare tutte queste possibilità, ad esempio per vedere quali funzionino meglio in determinate condizioni ambientali. A questo scopo, supponiamo di esser riusciti a reperire un super-calcolatore in grado verificare l'efficacia di un'intera proteina ogni frazione di secondo uguale a 10^{-50} e di avergli fatto cominciare il suo calcolo all'inizio dei tempi (cioè 15 miliardi di anni fa). Una semplice operazione mostra che il nostro super-calcolatore sarebbe arrivato oggi ad esplorare $4{,}7 \times 10^{67}$ proteine, e dunque sarebbe ancora molto lontano dalle 10^{130} possibili. D'altra parte l'unità di tempo di 10^{-50} secondi è già molto al di sotto delle durate dei processi fisici elementari concepibili. Vediamo dunque come il compito di analizzare tutte le possibili proteine una ad una sia di fatto un'impossibilità fisica (nell'universo attuale). Tutto ciò, se non altro, può far riflettere sul modo di operare della selezione naturale. In particolare suggerisce che l'evoluzione biologica, che ha portato alla costituzione degli organismi viventi attuali, «ha dovuto necessariamente mettere in gioco dei meccanismi di selezione *a priori*, ad esempio dei fenomeni di cooperazione amplificatrice, in grado di eliminare un numero enorme di possibilità ancor prima di esplorarle» (Cfr. H. Atlan, «L'intuition du complexe et ses théorisations», in *Les théories de la complexité*, *op. cit.*).

re costruito considerando la procedura iterativa in cui un numero x_{n+1} è ottenuto dal precedente x_n secondo la formula:[19]

$$x_{n+1} = rx_n (1 - x_n) \tag{5}$$

con la scelta $r = 4$, la quale fa sì che l'intervallo $[0,1]$ dei possibili valori della variabile x_n venga trasformato in se stesso. Scegliamo come valore iniziale un numero scelto "a caso" tra 0 e 1, ad esempio $x_0 = 0{,}4140613007\ldots$, e generiamo la sequenza infinita $x_1, x_2, x_3 \ldots$ a mezzo della formula precedente.[20] Osserviamo che tutti i numeri in tal modo generati fanno parte dell'intervallo unitario, cioè $0 \leq x_n \leq 1$ per tutti gli $n = 1, 2, 3\ldots$ Se ora "codifichiamo" questa successione rimpiazzando con uno 0 tutti i termini che soddisfano $x_n < 0{,}5$ e con un 1 tutti quelli che soddisfano $x_n \geq 0{,}5$, otteniamo una sequenza di 0 e 1 come sopra, e possiamo chiedere al nostro demonietto di determinarne la statistica. La risposta sarà che anche questa sequenza è aleatoria nel senso di Borel.[21] D'altra parte, possiamo immaginare che il nostro demonietto sia anche in grado di risalire dalla sequenza di 0 e 1 alla sua legge costitutiva scritta sopra. Per lui non vi saranno quindi segreti di alcun genere: basterà conoscere il dato iniziale x_0 e il valore del parametro r per poter ricostruire l'intera sequenza. La sua "recensione" sarà pertanto: $x_0 = 0{,}4140613007\ldots$, $r = 4$. Per noi umani le cose sono in questo caso molto diverse. Prima di tutto, come poter affermare di avere a che fare con tale o tal

[19] Questa semplice trasformazione non-lineare è stata proposta per la modellizzazione di alcuni processi evolutivi (con scelte opportune dei valori del parametro r). Ad esempio per calcolare la popolazione di batteri x_{n+1} in un brodo di coltura con risorse alimentari limitate, in termini della popolazione x_n alla precedente generazione, dove r indica il tasso medio di riproduzione (Verhulst, May). O ancora la variazione nel tempo di un capitale con tasso d'interesse autolimitantesi (Schuster), dove $r - 1$ indica il massimo tasso d'interesse ottenibile.

[20] Tecnicamente, diremo che un numero x_0 è scelto "a caso" nell'intervallo $[0, 1]$ se, fissato un arbitrario sotto intervallo di $[0, 1]$, ad esempio $[u, u + \delta u]$, la probabilità di trovarvi x_0 vale esattamente δu.

[21] Vale forse la pena di osservare che proprio questo è il metodo con cui si producono nei calcolatori successioni di "numeri casuali": si considera una trasformazione dell'intervallo unitario in sé, come quella scritta in (3) (la quale fu proposta proprio a questo scopo da Ulam e von Neumann nel 1947) e "scelto a caso" un numero $x_0 \in [0, 1]$, il "seme", si definisce l'n-esimo simbolo della successione uguale a 0 se $x_n \in [0, 1/2)$, uguale a 1 se $x_0 \in [1/2, 1]$.

altra sequenza infinita quando se ne possiede soltanto l'inizio, se non avendo a disposizione la sua regola di costruzione? Inoltre, anche supponendo di essere stati miracolosamente in grado di indovinare la legge costitutiva, per poter ricostruire *esattamente* la sequenza in questione ci servono i dati x_0 e r con ***precisione infinita***. Se ad esempio x_0 è un numero irrazionale "generico" ciò comporta la conoscenza di un numero infinito di cifre decimali, dunque una quantità d'informazione infinita. Vediamo questo punto un po' più in dettaglio. Con il cambiamento di variabili

$$x_n = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\pi\xi_n) \tag{6}$$

si ottiene la nuova legge $\xi_{n+1} = 2\,\xi_n$ Osserviamo che x_n è legato a ξ_n tramite la funzione periodica coseno. Ciò implica che l'aggiunta di un numero intero a ξ_n non ha alcun effetto sul valore di x_n. Sarà perciò equivalente considerare soltanto la parte non intera η_n di x_n (ad esempio se $\xi_n = 3{,}1260$ allora $\eta_n = 0{,}1260$). Ora, l'operazione di moltiplicazione per due assume un aspetto particolarmente semplice usando la notazione binaria. Ad esempio il numero

$$\eta_0 = 0{,}64453125\ldots = 1/2 + 1/8 + 1/64 + 1/256 + \ldots$$

in notazione binaria diviene

$$\eta_0 = 0{,}1010011\ldots$$

e allora è facile rendersi conto che l'operazione di moltiplicazione per due, che per la parte non intera si traduce in

$$\eta_{n+1} = 2\,\eta_n \ (\mathrm{mod}\ 1) \tag{7}$$

equivale allo spostamento del punto,

$$\eta_1 = 0{,}010011\ldots \quad \eta_2 = 0{,}10011\ldots \quad \eta_3 = 0{,}0011\ldots$$

È altresì evidente che se due dati iniziali η_0 e η'_0 differiscono tra loro di una quantità molto piccola, ad esempio $\eta_0 - \eta'_0 = \delta\eta = 2^{-100}$, allora l'"errore" crescerà con velocità esponenziale (cioè sarà moltiplicato per due in ciascuna iterazione) fino a rendere, dopo circa cento iterazioni, le due sequenze numeriche (quella generata partendo da η_0 e quella generata partendo da η'_0) senza alcun rapporto l'una con l'altra. Troviamo qui la dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali, ovvero la principale caratteristica dei sistemi che presentano caos deterministico.

Tornando ora al nostro problema di partenza, vediamo come una conoscenza soltanto approssimata, cioè quella che a noi umani è data avere in generale, del dato iniziale x_0 rende vana ogni speranza di predire quale aspetto avrà la nostra sequenza in un futuro arbitrariamente lontano, e questo nonostante che la sua generazione sia avvenuta in modo perfettamente deterministico.[22]

[22] Osserviamo che ciò è rigorosamente vero soltanto se il dato iniziale x_0 è stato scelto sufficientemente "a caso". Infatti, se ad esempio prendiamo $\eta_0 = 2/3 = 0{,}10101010\ldots$, troviamo, usando la (4), $x_0 = 3/4$ e quindi $x_n = 3/4$ per tutti gli $n \geq 0$, come è facile verificare. In altre parole lo "stato" del nostro sistema è uno stato costante e dunque totalmente prevedibile. Più in generale, scegliendo x_0 in modo opportuno (ad esempio prendendo η_0 uguale a un arbitrario "razionale diadico" e usando la (4)) si possono costruire infiniti "stati periodici", cioè per i quali esiste un numero intero $t \geq 0$ tale che $x_{n+t} = x_n$ per ogni $n \geq 0$. E questi ultimi ovviamente non presentano alcuna difficoltà di predizione. D'altra parte, scegliendo η_0 "a caso" otterremo "con probabilità uno" un numero "normale" nel senso di Borel, un numero cioè il cui sviluppo binario corrisponde ad una sequenza casuale di 0 e 1. In questo caso, le sequenze ottenute iterando sia (5) con dato inziale η_0, sia (3) con dato inziale il corrispondente x_0, saranno caotiche ed imprevedibili nel senso discusso sopra. Queste considerazioni hanno indotto alcuni autori a distinguere tra sistemi che generano un comportamento caotico e imprevedibile in modo intrinseco e quelli che necessitano di un dato iniziale già "aleatorio" di per sé. Evidentemente (5) fa parte della seconda categoria, e così (3), con $r = 4$, via la (4). In generale tale classificazione è molto meno evidente. Alcuni esempi di automi cellulari unidimensionali possono invece essere annoverati nella prima categoria. In questi sistemi, si parte da una sequenza idealmente infinita di 0 e 1 e l'iterazione consiste nell'aggiungere ad ogni istante temporale un'altra sequenza sotto la precedente, in accordo con una regola prestabilita. Ad esempio, la regola usata per ottenere la figura riportata più sotto è la seguente: sotto le triplette 110, 100, 010 e 001 scriviamo un 1, mentre scriviamo 0 sotto ogni altra tripletta. Se s_i^t indica lo stato binario della i-esima cellula all'istante t, questa regola può essere sintetizzata nell'espressione $s_i^{t+1} = s_{i-1}^t \oplus (s_i^t / s_{i+1}^t)$ dove $\oplus$ indica l'addizione modulo due, e / la disgiunzione booleana. La figura è allora ottenuta partendo dalla configurazione iniziale

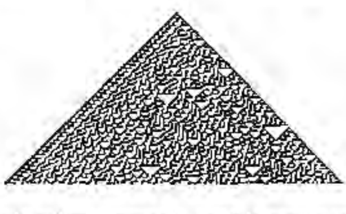
Come già osservato, comprendere una sequenza la cui osservazione non può solitamente fornire alcuna identificazione con un oggetto matematico preciso, come la trasformazione (3), e, in ogni caso, qualunque identificazione precisa risulta praticamente "inutile", nel senso che non può fornire in generale alcuna predizione delle osservazioni, comprendere un oggetto di questo tipo comporta la riformulazione di ciò che può essere considerato "utile", ossia quali sono le "buone domande" per tale sistema. In particolare, la sua stessa impredicibilità, una volta definita in termini matematici, può divenire oggetto d'indagine quantitativa.

Entropia e informazione

Nelle circostanze incontrate nella discussione precedente, ovvero in presenza di un comportamento impredicibile ed aleatorio, un senso importante che possiamo tentare di dare alla complessità del nostro sistema è di natura probabilistica ed è intimamente legato alla sua statistica.

La complessità di una sequenza di simboli a statistica definita (ed ergodica) si può definire in vari modi. Ci limiteremo qui alla nozione che, fino ad ora, ha trovato le applicazioni più importanti: la *quantità d'informazione* o *entropia* di Shannon. A questo scopo os-

...0001000... (ad esempio $s_0^0 = 1$ e $s_i^0 = 0$ per ogni $i \neq 0$) e disegnando un quadratino nero per ogni 1 osservato.



Vi sono forti indicazioni che la colonna centrale, ossia la sequenza data da $s_0^0\, s_0^1\, s_0^2\, s_0^3 \dots$ sia aleatoria (cfr. S. Wolfram, *Cellular Automata and Complexity*, Addison-Wesley Publ. Comp., 1994). Qui, evidentemente, l'aleatorietà è generata intrinsecamente dal sistema essendo la configurazione iniziale tutt'altro che aleatoria.

serviamo innanzitutto che la teoria dell'informazione associa ad un evento di probabilità p (con $0 \le p \le 1$) una quantità: l'informazione apportata del verificarsi di tale evento, $I(p)$, data dalla formula:[23]

$$I(p) = log_2 \frac{1}{p} = - log_2 p$$

Come si vede, l'informazione $I(p)$ cresce quando l'evento diviene più improbabile, ossia quando p decresce. Se consideriamo una sottosequenza finita S_n della nostra sequenza infinita S, la quantità d'informazione ottenuta osservando tale sottosequenza sarà quindi

$$I(S_n) = - log_2 f(S_n)$$

Osserviamo che il numero di sequenze possibili di lunghezza n è uguale a 2^n. Pertanto, se ad esempio S_n fa parte di una sequenza aleatoria nel senso di Borel, allora $f(S_n) = 1/2^n$ e quindi $I(S_n)$ sarà data dal numero di cifre necessarie a scrivere 2^n in base due, ossia n. All'estremo opposto, per la sequenza costante (tutti 0 o tutti 1), la quantità d'informazione di un qualunque spezzone di lunghezza arbitraria è sempre nulla (essendo il numero di sequenze permesse sempre uguale a uno). Nel caso leggermente più complicato della sequenza periodica (2) si trova che per $n \ge 3$, il numero di sequenze permesse di lunghezza n è uguale a 3 ed hanno tutte la stessa frequenza di apparizione pari a 1/3. Dunque la quantità d'informazione associata a una qualunque sottosequenza finita è uguale a $log_2 3$ =1,5850...

Per definire una grandezza *media* associata all'intera sequenza S possiamo procedere come segue. Innanzitutto, la quantità d'infor-

[23] La notazione $log_2 a$ indica il logaritmo di a in base 2 ed equivale, grosso modo, al numero di cifre necessarie per scrivere a in base 2. Ad esempio si ha $log_2 1 = 0$ oppure $log_2 2 = 1$ o ancora $log_2 2^n = n$. Vale osservare che il numero $log_2 a$ cresce molto più lentamente di a. L'uso della numerazione binaria è un fatto puramente convenzionale e corrisponde al fatto che la quantità d'informazione venga misurata in *bit* (dall'inglese *binary digits*).

mazione media associata all'insieme delle sottosequenze di lunghezza n è data da

$$H_n = -\sum f(S_n) \log_2 f(S_n)$$

dove la somma è presa su tutte le sottosequenze di lunghezza n. Quest'ultima grandezza cresce al più come n (nel caso puramente aleatorio vale esattamente n). Per una sequenza infinita S si definisce allora la quantità d'informazione media *per simbolo*, detta anche entropia, o complessità, di Shannon, come il limite

$$h(S) = \lim_{n \to \infty} \frac{H_n}{n} \tag{8}$$

Di nuovo, nel caso puramente aleatorio, si trova $h(S) = \log_2 2 = 1$, che si può interpretare dicendo che l'informazione media ottenuta dall'osservazione di un nuovo simbolo nella sequenza è esattamente di un *bit*.[24] È facile mostrare che, per un alfabeto binario come quello considerato qui, questa è la massima entropia raggiungibile, ossia la disuguaglianza $h(S) \leq 1$ è sempre verificata[25] (ciò, in parti-

[24] Alternativamente, si può dire che l'informazione media *necessaria* per la predizione di quello che sarà il simbolo $(n+1)$-esimo, dopo aver osservato i primi n, è di un *bit*. Che è un modo complicato di dire che l'unica maniera di predirlo è quello di osservarlo.

[25] Una proprietà interessante, che trova un'ovvia utilità in teoria dell'informazione [cfr. C. E. Shannon e W. W. Weaver, *The matematical theory of communication*, University of Illinois Press, Urbana, IL, 1949], afferma che una sequenza S di entropia $h(S)$ potrà essere *compressa* (allo scopo di trasmetterla o, forse, di *recensirla*) riscrivendo le parole di lunghezza n nello stesso alfabeto ma in modo che siano più corte, diciamo di lunghezza m, e la massima compressione possibile è data dalla formula: $m = n \cdot h(S)$. In questo senso, l'entropia $h(S)$ fornisce la lunghezza media per simbolo della descrizione minimale (cioè la "versione compressa") di S. Inversamente, una misura di complessità nel senso di quantità d'informazione media utilizzabile che deve essere "ricordata" quando si voglia ricostruire la sequenza S a partire dalla sua descrizione minimale, è stata introdotta da Grassberger [cfr. P. Grassberger, «Toward a quantitiative theory of self-generated complexity», in *Int. J. Theor. Phys.*, 1986, vol. 25, p. 907]. A questo scopo si considera la differenza $h_n = H_{n+1} - H_n$, che rappresenta la quantità d'informazione media necessaria a specificare il simbolo $(n+1)$-esimo della sequenza S dopo aver osservato i primi n. Questa quantità è monotonamente decrescente (tecnicamente ciò segue dalla concavità di H_n, in particolare si ha $h_n \to h(S)$ quando $n \to \infty$) e le sue variazioni (cioè le varizioni seconde di H_n) soddisfano $\delta_n = h_{n-1} - h_n \geq 0$. Quest'ultima grandezza rappresenta la quantità d'informazione media che fa diminuire l'incertezza sul simbolo $(n+1)$-esimo, ottenuta quando si osservi un simbolo in più nel passato. La corrispondente informazione media per le parole di lunghezza n sarà data da $n\delta_n$. L'indicatore di comples-

colare, rende tale grandezza incompatibile con l'idea intuitiva di complessità che abbiamo discusso all'inizio. Più oltre discuteremo esplicitamente questo punto).

La definizione di entropia di un messaggio è ricalcata su quella dell'entropia termodinamica di un sistema fisico. Quest'ultima misura la quantità di disordine, o se vogliamo di caso, presente in un dato sistema. Perché dunque la misura dell'informazione si esprime in termini di caso o di incertezza? La risposta è semplice: perché l'informazione acquisita osservando una specifica sequenza nella classe di tutte quelle possibili elimina d'un sol colpo l'incertezza presente in tale classe *prima* dell'osservazione.[26]

Osserviamo infine che la quantità d'informazione è definita a partire da una classe di oggetti: nella situazione vista sopra, una classe di sequenze è data dalla collezione di tutte le sequenze di lunghezza assegnata che appaiono in una sequenza infinita. Pertanto non ha senso parlare della quantità d'informazione di un messaggio *finito* individuale, cioè senza riferimento ad una classe di altri messaggi a priori equivalenti. Così, ad esempio, se fossimo interessati a studiare complessità della sequenza del DNA di Albert Einstein, avremmo a che fare con un oggetto unico, e non già un elemento

sità menzionato sopra (*effective-measure complexity*) è allora definito come $C_{EM} = \sum_{n=1}^{\infty} n\delta_n$. In particolare per una sequenza aleatoria si ha $h_n = h(S)$, per ogni $n \geq 1$, ovvero $\delta_n = 0$, e dunque $C_{EM}(S) = 0$. Lo stesso accade per qualsiasi sequenza costante. Per tutte le altre $C_{EM}(S) > 0$, ma può accadere che $C_{EM}(S) = \infty$. Ciò si verifica quando la convergenza di h_n verso il valore limite $h(S)$ non è sufficientemente rapida. Ad esempio per le sequenze generate dalla (5) con la scelta di r corrispondente all'*attrattore di Feigenbaum* (vedi più avanti), dove si ha $h(S) = 0$ e $h_n \sim 1/n$.

26 L'entropia di una sequenza di simboli, quando quest'ultima provenga dall'iterazione di un sistema dinamico ergodico, come ad esempio quello definito in (3), prende anche il nome di entropia di Kolmogorov-Sinai. Come abbiamo visto, questa grandezza è massima quando i simboli della sequenza si succedono "nel modo più casuale possibile", ossia con senza alcuna "memoria" dei valori assunti dai simboli precedenti. Nel contesto della classificazione "ergodica" dei sistemi dinamici, esistono altri indicatori statistici della complessità, o della regolarità, di un sistema, che consentono in una certa misura di render conto della "memoria" presente nella sua evoluzione temporale. Tali indicatori vengono definiti all'interno di una formalizzazione matematica molto raffinata che prende il nome di formalismo termodinamico, che, tra l'altro, si prefigge lo scopo di classificare gli "stati asintotici" di un sistema a partire dalla natura delle "interazioni locali" tra i suoi costituenti. Per una discussione su questa linea di ricerca nel quadro della complessità, e su altri aspetti discussi in questo testo, rimandiamo al libro: R. Badii e A. Politi, *Complexity. Hierarchical structures and scaling in physics*, Cambridge University Press 1997.

scelto a caso da un qualche insieme su cui è definita una distribuzione di probabilità. Per definire il contenuto d'informazione di una sequenza finita individuale risulta più appropriata la nozione di informazione algoritmica.

Complessità algoritmica

Abbiamo visto che una sequenza aleatoria nel senso di Borel può ancora ammettere "regole di costruzione" che possono renderla in una certa misura semplice e prevedibile. Ora, la definizione di "recensione ottimale" come di una "sequenza di istruzioni" per mezzo della quale sarà possibile, per lo stesso o un altro demone, ricostruire la sequenza di partenza, corrisponde alla nozione di *algoritmo*. In generale, un algoritmo è un modo sistematico di effettuare un certo compito. Se il compito in questione è sufficientemente formalizzato, come ad esempio quello di riprodurre una sequenza simbolica, il modo più economico di applicarlo, oggi come oggi, è senz'altro quello di farlo eseguire da un calcolatore. A questo punto, sospinti da un'ondata di riconversione, lincenziamo (momentaneamente) il nostro demonietto e sostituiamolo con una macchina. In particolare sceglieremo una *macchina di Turing*. Questo automa (macchina ideale) è caratterizzato da un numero finito di stati interni attivi e da uno stato di arresto. Vi è inoltre una testina di lettura/scrittura e un nastro di lunghezza infinita suddiviso in caselle. Ciascuna casella potrà essere vuota oppure contenere una lettera di un alfabeto finito (ad esempio quello binario). La macchina opera per cicli successivi completamente determinati. Se si trova nello stato di arresto non fa niente. Altrimenti, dopo aver letto la casella su cui la testina è posizionata, e a seconda dello stato interno in cui si trova, cancella quanto vi era scritto e vi riscrive qualcos'altro (o anche la stessa cosa). Poi si sposta di una casella, a destra o a sinistra, e passa ad un nuovo stato interno. Se il nuovo stato interno è uno stato attivo, la macchina compie un nuovo ciclo determinato dal contenuto della nuova casella e dal suo nuovo stato interno, altrimenti si ferma. All'inizio del processo, la parte iniziale del nastro contiene una sequenza finita che è il messaggio d'ingresso. Alla fine del processo (cioè quando la macchina finisce nello stato di arresto), il nastro conterrà una nuova sequenza che è la risposta della macchina al messaggio d'ingresso, cioè il suo messaggio di uscita. Fin dalla sua ideazione, da parte di Alan Turing nel 1936, questo automa costituisce la nozione formalizzata generalmente accettata per una *procedura effettiva*, cioè una procedura descrivibile con un algoritmo finito e che si sviluppa per passi discreti, ciascuno dei quali realizzabile in modo meccanico.[27]

Un fatto importante da osservare è l'esistenza di una macchina di Turing *universale*. Quest'ultima può essere considerata come un'idealizzazione, cioè una versione astratta epurata da ogni aspetto tecnologicamente tangibile, di un calcolatore ordinario provvisto di una capacità di memoria infinita. L'aggettivo universale sta ad indicare che questo sistema è in grado di *simulare* qualunque altra macchina di Turing, ossia di eseguire qualsiasi algoritmo di calcolo. Per far funzionare un algoritmo particolare sarà pertanto necessario introdurre inizialmente, oltre ai dati d'ingresso, anche delle istruzioni supplementari sull'insieme degli stati interni e delle regole di comportamento. In generale diremo che una sequenza p, di lunghezza finita $l(p)$, è un *programma* se, una volta assegnata come istruzione d'ingresso, fa sì che la macchina di Turing universale M si arresti dopo aver letto (ed eseguito le istruzioni corrispondenti a) tutti i suoi $l(p)$ simboli.

[27] L'azione di una macchina di Turing può essere interpretata in termini del calcolo di una funzione f che manda numeri interi in numeri interi. Da questo punto di vista, il contenuto del nastro quando la macchina si arresta partendo dalla sequenza dei dati d'ingresso w, sarà un'opportuna codifica dell'intero $f(n)$ se n era l'intero corrispondente a w con la stessa codifica. Per questa ragione, la teoria della macchine di Turing viene talvolta indicata come la *teoria della calcolabilità*. In particolare, l'*ipotesi di Church-Turing*, universalmente accettata ma indimostrabile, almeno fintanto che la nozione di calcolabilità resta definita in modo soltanto informale, afferma che qualunque funzione calcolabile può essere implementata su una macchina di Turing. Per una trattazione esauriente di questa teoria rimandiamo a J. E. Hopcroft e J. D. Ullman, *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1979.

Per una data sequenza *finita* S_n esisteranno in generale più programmi p che la generano come messaggio di uscita di una macchina di Turing universale, cioè tali che $M(p) = S_n$. L'*informazione algoritmica* o *complessità di Kolmogorov-Chaitin* $K_M(S_n)$ di una sequenza finita S_n è definita allora come la lunghezza minima $l(p)$ di un programma p tale che $M(p) = S_n$. In formule:[28]

$$f(S_n) = \min_{p\,:\,M(p) = S_n} l(p)$$

Se non esiste alcun programma p tale che $M(p) = S_n$ allora porremo $K_M(S_n) = \infty$. Ad esempio, se S_n è data dai primi $n = 3k$ simboli della sequenza (2) allora l'algoritmo più breve che la genera sarà evidentemente qualcosa del tipo: "scrivi 011 k volte", e la sua lunghezza sarà data da $3 + c + \log_2 k$, dove 3 è il numero di *bit* della parola 011, c è il numero di *bit* necessari a definire un'istruzione di scrittura e $\log_2 k$ è approssimativamente il numero di cifre necessarie a scrivere l'intero k in base due. Se un dato messaggio contiene ad esempio dieci milioni di *bit*, la sua informazione algoritmica non potrà essere molto più grande di dieci milioni di *bit*. Basta usare il programma "scrivi ... segue il testo dell'intero messaggio". Inversamente, se la quantità d'informazione di un messaggio è di dieci milioni di *bit*, la sua informazione algoritmica non sarà *genericamente* molto inferiore a tale numero. Ma vi sono delle eccezioni, come abbiamo già avuto modo di vedere.

In analogia con la definizione dell'entropia di Shannon, per una sequenza infinita S si definisce la complessità algoritmica *per simbolo* come il limite (che non dipende dalla macchina universale M):

$$k(S) = \lim_{n \to \infty} \frac{K_M(S_n)}{n} \tag{9}$$

dove S_n indica la sequenza formata dai *primi n* simboli di S. Una definizione precisa di sequenza casuale, o aleatoria (in senso algoritmico), sarà dunque la seguente (Martin-Löf):

[28] Vediamo dunque come la definizione di Kolmogorov e Chaitin risponda in qualche modo alla nozione di complessità come "complessità di fabbricazione" presagita da von Neumann.

Una sequenza infinita sarà detta aleatoria, in senso algoritmico, se la complessità delle sue sottosequenze finite di lunghezza n *cresce come* n.

Dunque una sequenza infinita sarà aleatoria se la sua informazione algoritmica per simbolo è uguale a uno. Evidentemente, per quanto detto più sopra, ogni sequenza aleatoria in senso algoritmico lo è anche nel senso di Borel, ma non è vero il viceversa, come la sequenza di Champernowne mostra chiaramente.[29] Le sequenze algoritmicamente aleatorie sono dunque meno numerose di quelle statisticamente aleatorie. Tuttavia è facile mostrare che una sequenza scelta "a caso" nell'insieme di tutte le possibili sequenze infinite è ancora casuale in questo senso più stretto.

Complessità, caso e significato

Le due definizioni di complessità, ma sarebbe forse meglio dire *misure di complessità*, che abbiamo discusso fin qui, una statistica (entropia di Shannon) e una algoritmica (complessità di Kolmogorov-Chaitin), se messe in relazione diretta con la nozione di caso o, nella fattispecie, di sequenza casuale, danno luogo ad una sorprendente proliferazione di aspetti paradossali. Ciò che vorrei suggerire qui è che tali paradossi costituiscono una forma di risorgenza surrettizia del significato in un contesto dal quale era stato implicitamente escluso.

In primo luogo, abbiamo visto che per entrambe le definizioni, il massimo di complessità è raggiunto dalle sequenze totalmente prive di struttura, ossia dalle sequenze casuali. Ciò è in palese contra-

[29] Altri esempi interessanti sono dati dalle sequenze delle cifre decimali di numeri irrazionali come π, e, $\sqrt{2}$, le quali, pur essendo con tutta probabilità sequenze aleatorie nel senso di Borel, possono essere "calcolate" con un algoritmo finito. Osserviamo tuttavia che per sequenze a statistica definita ed ergodica le due nozioni di fatto coincidono "quasi-ovunque". In particolare, esiste un teorema (Brudno, 1983) il quale afferma che dato un sistema dinamico *ergodico*, come ad esempio quelli definiti in (3) e (5) per quasi tutte le sequenze ottenute codificando le sue orbite (cioè per tutti i dati inziali scelti "a caso"), vale l'identità $h(S) = k(S)$.

sto con qualsiasi nozione intuitiva di complessità, che invece vorrebbe maggiore complessità laddove vi sia maggiore struttura (quale che sia il senso da dare al sostantivo "struttura"). La soluzione di questo paradosso può giungere da più parti. Da una parte possiamo semplicemente osservare che se anche una sequenza viene classificata aleatoria da un *test* statistico o algoritmico, ciò non toglie che, ad un diverso livello di descrizione, ad esempio nell'ambito di una teoria più generale o semplicemente della nostra intuizione soggettiva delle cose, possa assumere dei significati funzionali.[30]

Oppure possiamo tentare di modificare la teoria introducendo definizioni più sofisticate in cui la complessità sia portatrice di una qualche forma di significato. Tentativi di questo genere sono oggetto di ricerca attiva negli ultimi anni. Menzioniamo qui, senza entrare nei dettagli formali, soltanto la *profondità logica*, introdotta da Bennett, e la *sofisticazione*, definita da Atlan e Koppel.[31] Bennett propone di definire la complessità di una sequenza non attraverso il suo contenuto d'informazione ma attraverso il "valore" o l'importanza che ha per il suo ricettore (o lettore). Per comprendere quest'idea osserviamo innazitutto che qualsiasi sequenza può essere prodotta con il lancio di una moneta. D'altra parte, se il ricettore si troverà di fronte ad esempio ad un passo letterario, scarterà l'ipotesi del lancio della moneta sulla base del fatto che essa implica un numero molto grande di assunzioni particolari, e cercherà una

[30] Ad esempio, può accadere che una sequenza molto lunga, pur essendo statisticamente regolare, sia nondimeno comprensibile per un lettore se opportunamente decodificata. O ancora, il programma minimale preposto a generare una sequenza aleatoria, cioè irriducibile, sarà anch'esso, per definizione, una sequenza aleatoria. Ma nello stesso tempo, ad un livello più inglobante, cioè al metalivello della descrizione della teoria della complessità algoritmica, esso acquisice un significato ben preciso, che è quello appunto di generare la sequenza aleatoria di partenza quando inserito in una macchina di Turing.

[31] Gli articoli originali sono: C. H. Bennett, «Dissipation, information, computational complexity and the definition of organization» in D. Pines, *Emerging Syntheses in Science*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1988, p. 215; M. Koppel e H. Atlan, «An almost machine-independent theory of program length complexity, sophistication and induction», in *Information Sciences*, 1991, vol. 56, p. 23. Per una rassegna generale di questi ed altri tentativi rimandiamo a P. Grassberger, «Randomness, information and complexity», in F. Ramos-Gomez, *Proc. 5th Mexican Summer School on Statistical Mechanics*, World Scientific, Singapore 1989, p. 59; e anche R. Badii e A. Politi, *op. cit.*

spiegazione più plausibile, cioè basata su un modello portatore di una struttura più ricca. L'assunto metodologico di Bennett è essenzialmente una versione del "rasoio di Occam": il lavoro (ed es. il programma) *plausibilmente* necessario per generare un messaggio è dato dallo sforzo richiesto per riderivarlo a partire da ipotesi causali il più possibile prive di inutili assunzioni *ad hoc*. Queste osservazioni vengono poi formalizzate identificando la causa più plausibile di un messaggio S con la sua descrizione algoritmica minimale, e la sua complessità o profondità logica, con il *tempo* necessario a ricostruirlo a partire da tale descrizione minimale. Così, ad esempio, il tempo necessario per generare una sequenza casuale è dato essenzialmente dal tempo necessario per leggere il programma che la genera, e dunque è proporzionale alla sua lunghezza. Al contrario, una sequenza S con elevata profondità logica richiederà magari un programma molto breve, ma il tempo necessario per la sua decodifica (ad esempio da parte di una macchina di Turing) sarà molto grande, molto più grande della lunghezza di S.[32] L'esempio ispiratore di questa definizione è la vita sulla Terra. In effetti, possiamo supporre che il "programma" originario fosse molto breve, un minimo di informazione genetica e di struttura cellulare assemblate più o meno casualmente, ma ci sono voluti circa un miliardo di anni per farlo "eseguire" da una gigantesca macchina analogica parallela, la Terra appunto, affinché la vita assumesse la forma attuale.

La definizione di Bennett "corregge" in qualche misura la complessità algoritmica *standard* dal fatto di non tener conto in alcun modo del *tempo* necessario ad eseguire un dato programma minimale. Koppel e Atlan partono invece dalla constatazione che nei calcolatori reali esiste una distinzione tra *programma* e *dati* d'ingresso, quando invece nessuna distinzione intrinseca tra queste due entità

[32] La sequenza data dalla colonna centrale della figura riportata nella nota 24, essendo generata da una configurazione iniziale e da una regola molto semplici da specificare, ha complessità algoritmica uguale a zero. D'altra parte, vi sono buone indicazioni del fatto che l'unico modo di generarla sia la simulazione diretta (cfr. S. Wolfram, *op. cit.*). Ciò implica innanzitutto che la sua entropia sia massimale e, inoltre, essendo necessarie circa n^2 iterazioni per ottenere i primi n simboli, che abbia un'elevata profondità logica.

viene presa in considerazione dalla teoria dell'informazione algoritmica. Per definire la sofisticazione si devono distinguere due parti differenti nella descrizione di un oggetto. L'una consiste in una lista delle sue proprietà, che rende conto della sua struttura, l'altra tende invece a specificarlo nella classe degli oggetti che condividono la sua stessa struttura. La sequenza

0000110011110011000000111100001111001100l1...

può essere descritta notando innanzitutto che per ogni intero n il simbolo $2n$-esimo è uguale al $(2n-1)$-esimo, cioè che i simboli vengono in coppie uguali. Possiamo quindi specificare la sequenza particolare delle coppie osservate

0010110100011001l0101...

ma se dobbiamo predire la continuazione della sequenza, potremo soltanto dire che, presumibilmente, sarà composta da coppie uguali di simboli, ma senza poter dire in alcun modo quali coppie. Ora, una sequenza aleatoria non ha alcuna struttura. Di conseguenza la sua descrizione consiste soltanto in quest'ultima parte, cioè nella sua specificazione nella classe di tutte le sequenze aleatorie. Definiremo allora la sofisticazione di una sequenza, come la lunghezza, nella sua descrizione minimale, della parte che riguarda la sua struttura. In questo modo, tanto le sequenze "semplici" quanto quelle casuali hanno una sofisticazione trascurabile. La definizione formale ricorre ancora alle macchine di Turing universali e le due parti della descrizione di una sequenza corrispondono alle due nozioni di programma e di dati rispettivamente. Di nuovo, l'ispirazione per questa definizione proviene dalla biologia, in particolare dall'analisi del DNA. In particolare, la metafora comune secondo la quale il DNA svolge il ruolo di programma genetico è stata criticata da Atlan,[33] che invece considera le sequenze di DNA come "da-

[33] Si vedano ad esempio i già citati colloqui di Cerisy.

ti" per il metabolismo cellulare il quale, a sua volta, ricoprirebbe il ruolo di "programma" biologicamente pertinente.[34]

Queste due nozioni quantitative di "complessità portatrice di significato", una volta formalizzate ed utilizzate per analizzare una sequenza infinita risultano di fatto equivalenti. Ciò significa che o sono entrambe infinite o entrambe finite, e in quest'ultimo caso differiscono per una costante che non dipende dalla sequenza considerata.[35]

Osserviamo infine che tutte queste definizioni della complessità in senso algoritmico, come l'informazione algoritmica, la profondità logica e la sofisticazione, pur svolgendo un importante ruolo di elucidazione logica e teorica, hanno l'indesiderabile caratteristica di non essere esattamente calcolabili, cioè misurabili in termini numerici.[36] Ciò è dovuto essenzialmente a due fattori. La richiesta di un programma minimale: non possiamo sapere se un programma che riproduce una data sequenza sia effettivamente quello più breve; e la dipendenza dalla macchina: un calcolo effettivo verrà fatto su una macchina particolare (quella che abbiamo a disposizione) per la quale sarà in generale difficile determinare in modo preciso la sua prossimità a una macchina di Turing universale.

Più oltre discuteremo altre definizioni della complessità in termini di linguaggi formali in grado di fornire entità più direttamente quantificabili. Ma prima vorrei tornare di nuovo alla relazione tra complessità e caso per scoprirvi nuovi aspetti, più sottili ma forse anche più essenziali, di paradosso e di non-calcolabilità.

[34] Come già osservato da von Neumann, affinché un sistema possa evolversi verso livelli elevati di complessità è necessario che contenga la sua autodescrizione, cioè che sia in grado di autoreplicarsi. Questa proprietà delle sequenze di DNA è dunque certamente un segno della loro complessità. D'altra parte, in accordo con il punto di vista critico di Atlan, ciò può non essere sufficiente a far sì che esse siano in grado di codificare una sorta di "macchina di Turing biologica", cioè un meccanismo in grado di riprodurre *tutte* le proprietà di organizzazione strutturale e funzionale degli esseri viventi. Piuttosto, come vedremo anche più avanti, ciò può significare che le leggi della fisica possono dar luogo a "prestazioni" complesse in sistemi sufficientemente complessi.

[35] Nel caso in cui la sequenza in questione abbia una statistica definita ed ergodica, la stessa equivalenza sussiste rispetto all'indicatore di complessità C_{EM} definito nella nota 27.

[36] Anche se in molti casi interessanti se ne possono dare ragionevoli "stime".

Complessità ed indecidibilità

Il punto di partenza sta nell'osservazione che l'identità tra complessità massimale e "puro caso" è soltanto formale. In effetti, sebbene, come abbiamo visto, quasi tutte le sequenze siano aleatorie, non può esistere una procedura effettiva per produrne anche una soltanto, perché ciò violerebbe appunto il suo carattere aleatorio. Come ha scoperto Chaitin, esiste un legame stretto tra questo fatto paradossale e il famoso risultato di Gödel sull'incompletezza di certi sistemi formali. Apriamo una breve parentesi.

Un *sistema formale*, come ad esempio l'artimetica, è costituito essenzialmente da un numero finito di *assiomi* e di *regole d'inferenza*. Queste permettono di dedurre, a partire dagli assiomi, una quantità a priori illimitata di conseguenze, cioè di asserzioni *vere*. Per stabilire che una data proposizione è vera all'interno di un sistema formale, sarà necessario determinarne una *dimostrazione*. Concretamente, si dovrà determinare una procedura effettiva (altrimenti detta meccanica, ricorsiva, o calcolabile) che, messa in presenza di una sequenza finita di simboli di un qualche alfabeto finito, consenta di *decidere in un tempo finito* se tale sequenza è o non è una dimostrazione della proposizione in questione.[37] Il processo di formalizzazione progressiva della matematica, in particolare dell'artimetica e della logica, culminato nel programma di David Hilbert, sottendeva la speranza che, a formalizzazione ultimata, data una qualunque proposizione formulata con sufficiente precisione, ad esempio un'ipotetica nuova proprietà dei numeri interi, si potesse decidere se essa è vera o falsa. Nel 1931 Gödel ha

[37] Possiamo immaginare di ordinare tutte queste sequenze per ordine di lunghezza crescente e per ordine alfabetico quelle di lunghezza data, in una sorta di dizionario infinito. Se allora tale procedura effettiva esistesse, potrebbe ad esempio esaminare in un tempo finito tutte le sequenze di lunghezza inferiore a un numero fissato, diciamo cento miliardi, e scoprire in tal modo tutte le possibili proposizioni vere, cioè tutti i teoremi all'interno del sistema formale in questione, alla portata della mente umana. Se poi questo programma fosse realizzabile per quei sistemi formali che costituiscono l'ossatura della matematica elementare, come ad esempio l'artimetica e la logica, allora non vi sarebbe più molto da fare per buona parte dei matematici di professione.

vanificato tale speranza dimostrando che *in ogni sistema formale abbastanza "grande", cioè con un numero sufficiente di assiomi, da contenere l'aritmetica, esiste una proposizione* indecidibile, *ossia tale che non si possa determinare una dimostrazione né per essa, né per la sua negazione.*

Il prototipo di tale proposizione è una versione del classico paradosso del mentitore, che nel nostro contesto ed espressa in modo informale suona: "questa proposizione è indimostrabile" (all'interno del sistema formale considerato). Evidentemente, tale proposizione è dimostrabile soltanto se è falsa, ma ciò comporterebbe che il sistema formale in questione è contraddittorio. Vediamo così che il prezzo da pagare per garantire la *non contraddizione* è l'*incompletezza.*

Per introdurre il legame sottile tra incompletezza e caso torniamo alle nostre sequenze di 0 e 1. Se vogliamo mostrare che una lunga sequenza S_n *non* è complessa sarà sufficiente esibire un programma *breve* che la genera. Per contro, se vogliamo tentare di mostrare che S_n è molto complessa, sarà necessario verificare che nessun programma di lunghezza *inferiore* a quella di S_n è in grado di riprodurla quando inserito in una macchina di Turing universale. Ci troviamo dunque in una situazione analoga a quella descritta sopra a proposito delle dimostrazioni nei sistemi formali. In particolare, se esistesse una procedura effettiva in grado di effettuare questa verifica in un tempo finito e *per una qualsiasi sequenza data* (abbastanza lunga), sarebbe legittimo costruire espressioni autoreferenziali del tipo "S_n è la prima sequenza (in ordine lessicografico) la cui complessità è superiore a quella di questa frase", il cui carattere paradossale discende dal fatto che S_n sarebbe generata da un programma di lunghezza uguale a quella della sua definizione, che però afferma il contrario.

Un aspetto del teorema di Gödel è allora che il problema (*halting problem*) di sapere se una macchina di Turing, quando vi sia stato inserita una data sequenza d'ingresso, si arresterà prima o poi con un messaggio di risposta o al contrario non si arresterà mai, è indecidibile, cioè non esiste un algoritmo finito che consenta di determinare una risposta affermativa o negativa.

La conseguenza di tutto questo è che non possiamo determinare in modo ricorsivo, cioè per mezzo di un'unica procedura finita, la complessità di *tutte* le sequenze di lunghezza data abbastanza grande. In particolare, un'asserzione del tipo "la sequenza infinita S è aleatoria", o è falsa, oppure è indecidibile.

Ma dove siamo arrivati? Siamo partiti con una sequenza binaria molto lunga, cercando di caratterizzarne la "complessità di fabbricazione". A questo scopo abbiamo preso un automa universale e gli abbiamo chiesto di farne una "recensione ottimale". Poi ci siamo accorti che per questo dovevamo fornire al nostro automa un super-programma che fosse in grado di eseguire un vaglio tra tutte le possibili recensioni di tutte le possibili sequenze della stessa lunghezza, per vedere se ve ne fossero di appropriate per la nostra sequenza, e tra queste, quale fosse quella ottimale, cioè la più breve. E la conclusione è stata che, a parte casi particolarmente "semplici" che un po' schematicamente possiamo classificare come eccezionali, se la nostra sequenza è lunga abbastanza, l'esistenza di una tale recensione ottimale può essere indecidibile.

Per quanto sorprendente questa conclusione possa essere, possiamo sempre pensare che sia il frutto di una perversione intrinseca di certi sistemi astratti come la logica formale o la teoria degli automi e che, in definitiva, poco abbia a che vedere con la "vera" natura della sequenza simbolica che abbiamo pazientemente compilato codificando la successione degli stati di un qualche sistema fisico.

Ma, ancora una volta, la complessità delle cose che ci circondano viene a sorprenderci. Uno degli aspetti interessanti nello studio dei "sistemi complessi" degli ultimi anni è infatti l'osservazione che alcuni sistemi "fisici", anche apparentemente molto semplici, come ad esempio il *Gioco della vita*, sono in grado, in opportune condizioni, di ... "comportarsi come automi universali". Cerchiamo ora di chiarire questo punto. Ciò ci darà anche l'occasione di discutere brevemente altre misure della complessità associate alla grammatica dei linguaggi formali.

Caratterizzazione computazionale dei sistemi fisici e linguaggi formali

L'evoluzione di un sistema fisico, cioè la successione dei suoi stati a partire da uno stato o configurazione iniziale, può essere pensata come un *processo di calcolo*,[38] in cui la configurazione iniziale gioca il ruolo dell'insieme dei dati d'ingresso, mentre i dati di uscita sono rappresentati dall'insieme delle configurazioni finali del sistema (si parla talvolta degli *attrattori* del sistema, cioè appunto l'insieme degli stati verso i quali l'evoluzione del sistema converge asintoticamente). Inoltre, ciascuna delle configurazioni asintotiche generate dall'evoluzione del sistema, se opportunamente codificata, potrà essere descritta da una *parola* di un linguaggio formale opportuno. Così, un modo di classificare la complessità di un sistema fisico sarà proprio quello di "decifrare" il linguaggio formale generato "spontaneamente" dal sistema, ossia individuare le *regole grammaticali* che consentono di costruire le parole a partire dai simboli dell'alfabeto corrispondente. D'altra parte, come abbiamo già accennato, un dato linguaggio formale può essere messo in corrispondenza con una particolare classe di automi in grado di riconoscerne o, in modo equivalente, di generarne, tutte le parole. In questo modo, è possibile stabilire una corrispondenza tra l'evoluzione di un sistema fisico e il processo di calcolo generato da una classe di automi. Osserviamo tuttavia che, nella gran parte dei casi interessanti, la generazione di particolari configurazioni asintotiche non è deducibile *a priori* dall'insieme dei dati: configurazione iniziale e leggi di evoluzione. In questo senso, la corrispondenza tra

[38] L'assunzione metodologica che i processi rilevanti studiati nelle scienze fisiche e biologiche siano in larga misura riconducibili ad esempi di calcolo universale, è di vecchia data. Proprio a partire da tale assunzione, generazioni di automi sono stati costruiti con gli scopi più diversi e nei campi più diversi, dalla teoria della comunicazione e del controllo (Wiener), alla biologia teorica (von Neumann), all'intelligenza artificiale (Minsky). Tra gli obiettivi ricordiamo il movimento dei *robot*, il riconoscimento di immagini, l'elaborazione di strategie automatiche nei giochi (in particolare gli scacchi), la modellizzazione di processi biologici (automi cellulari), l'emulazione di processi cognitivi (reti neurali). Più di recente, questo punto di vista è stato sviluppato da Stephen Wolfram (cfr. S. Wolfram, *op. cit.*).

il comportamento di un particolare sistema fisico e le prestazioni di una classe di automi, può essere vista come una proprietà *emergente* del sistema in questione. Una proprietà cioè della quale difficilmente si sarebbe potuto prevedere l'occorrenza *prima* di osservare l'evoluzione del sistema stesso.

Esiste una classificazione gerarchica dei linguaggi formali e delle corrispondenti classi di automi che li generano, la *gerarchia di Chomsky*, la quale, se anche non esaustiva, costituisce un importante riferimento per la classificazione di comportamenti di "complessità e generalità crescente" nei sistemi fisici.

Al grado più basso della gerarchia si trovano i linguaggi *regolari*, ossia i linguaggi generati da un automa finito. Quest'ultimo può essere pensato come una macchina di Turing ipersemplificata, alla quale sia stato tolto l'accesso al nastro (dunque anche ogni accesso alla memoria), con un numero finito di stati interni e con le relative regole di transizione da uno stato all'altro. Il meccanismo di controllo di un ascensore è un esempio di automa finito. Infatti non ricorda nulla della sequenza delle richieste di servizio precedenti e il suo comportamento dipende soltanto dal piano al quale si trova, dalla direzione del moto (su o giù) e dall'insieme delle richieste non ancora soddisfatte. È utile pensare ad un *grafo* finito, cioè un insieme di *nodi* connessi tra loro da un insieme di *archi* associati ai vari simboli dell'alfabeto (non necessariamente distinti). Le parole del linguaggio corrispondono dunque ai cammini possibili lungo il grafo. Date le regole grammaticali di un linguaggio regolare L, stabilite ad esempio assegnando l'insieme delle *parole proibite*, si può mostrare che esiste un unico grafo minimale G (cioè con il più piccolo numero di nodi) che accetta (o riconosce, o genera) tutte le parole di L.[39] Evidentemente, più grande è il numero di nodi di G più complicato sarà l'insieme delle regole grammaticali necessarie a descrivere L come linguaggio regolare. Un indicatore di complessità, facilmente ed esattamente calcolabile, per

[39] Cfr. J. E. Hopcroft e J. D. Ullman, *op. cit.*

una sequenza simbolica descritta da un linguaggio regolare L è allora dato da[40]

$$C_{RL} = log_2 N(G) \tag{10}$$

dove $N(G)$ è il numero di nodi del grafo minimale G che genera L.

Molti sistemi dinamici interessanti danno luogo a sequenze simboliche descritte da linguaggi regolari. In particolare, sarà questo il caso ogni volta che sia possibile costruire una *partizione di Markov finita*, ossia una decomposizione dello spazio degli stati del sistema in un numero finito di elementi disgiunti, con la proprietà che, trovandosi in un dato elemento, esiste una regola, fissata una volte per tutte, che consente di stabilire in quali elementi ci si può trovare al passo successivo e in quali no.[41]

[40] S. Wolfram, «Computation theory of cellular automata» (1984), in S. Wolfram, *op. cit.* Osserviamo che la grandezza definita C_{RL} ha un carattere puramente "topologico", ossia dipende soltanto dalle configurazioni possibili del sistema, senza tenere in alcun conto la probabilità con cui ciascuna configurazione può realizzarsi. Nello spirito della teoria dell'informazione sarebbe più appropriato definire la complessità di un linguaggio regolare come $-\sum_i p_i \, log_2 \, p_i$ dove la somma si estende all'insieme di tutti i nodi del grafo e p_i è la probabilità di visitare l'i-esimo nodo (vedi, ad esempio, P. Grassberger, *op. cit.*).

[41] Ad esempio per il sistema dinamico definito in (5), con $r = 4$, i due intervalli $[0, 1/2]$ e $[1/2, 1]$ determinano una partizione di Markov di $[0, 1]$ per cui la regola di transizione è banale: ciascun intervallo può essere raggiunto a partire da ciascun altro. Conseguentemente, la dinamica sarà descritta da un linguaggio regolare in cui tutte le sequenze possibili di 0 e 1 sono permesse. Il grafo minimale corrispondente è fatto da un solo nodo da cui partono e ritornano due archi contrassegnati dai simboli 0 e 1 rispettivamente. In questo caso si ha dunque $C_{RL} = log_2 1 = 0$. Un esempio leggermente più complicato è dato dalla "mappa a tetto", definita dall'iterazione $x_{n+1} = a + 2(1 - a)\, x_n$, se $x_n < 0{,}5$; $x_{n+1} = 2(1 - x_n)$, se $x_n \geq 0{,}5$, con la scelta $a = (3 - \sqrt{3})/4$. In questo caso, il punto "critico" $x = 0{,}5$ appartiene ad un'orbita periodica di periodo 5. Ogni orbita, i cui punti vengano codificati da 0 se si trovano a sinistra di 0,5 e da 1 se si trovano a destra, è descritta da un linguaggio regolare con due sole parole proibite, 000 e 0011, e generato da un grafo minimale con quattro nodi (che corrisponde ad una partizione di Markov con quattro elementi). In questo caso dunque si ha $C_{RL} = log_2 4 = 2$. Osserviamo che, inversamente, l'entropia della mappa a tetto è minore di quella del sistema (5). Osserviamo infine che se, per il sistema (5), prendiamo la condizione iniziale x_0 nel *punto critico*, cioè $x_0 = 1/2$, si ha $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, e quindi $x_n = 0$ per ogni $n \geq 2$. In altre parole il punto critico viene mandato in un *punto periodico* in due iterazioni (in questo caso $x = 0$ è un *punto fisso*, cioè periodico con periodo uguale a uno). Più in generale, facendo variare il parametro r nell'intervallo $(0, 4]$, la trasformazione (5) dà luogo ad un linguaggio regolare ogni volta che il punto critico va a finire su un'orbita periodica dopo un numero finito di iterazioni. Se ciò non accade, le sequenze generate dall'iterazione di (5) non ammettono una

Nella gerarchia di Chomsky i linguaggi formali vengono classificati essenzialmente sulla base della capacità di memoria della classe di automi ad essi associati. Sopra i linguaggi regolari troviamo i linguaggi non-regolari, distinti progressivamente in linguaggi liberi dal contesto (*context-free*), dove la memoria è data da un numero fisso di elementi disponibili ad ogni istante fissato; i linguaggi sensibili al contesto (*context-sensitive*), per i quali la memoria disponibile è proporzionale alla lunghezza della sequenza d'ingresso; e, al grado più alto, i linguaggi formali senza restrizioni (*unrestricted*), il cui automa associato è la macchina di Turing, già discussa, dunque con memoria illimitata.

Abbiamo già visto alcuni esempi di sistemi associati ad un linguaggio regolare. Più in generale, quali che siano le leggi di evoluzione e lo stato inziale di un sistema dinamico discreto, le configurazioni generate in un numero *finito* di passi temporali corrispondono sempre ad un linguaggio regolare. Il problema nasce quando si voglia comprendere le configurazioni *asintotiche*, cioè quelle ottenute con un numero idealmente infinito di iterazioni. Per alcune classi di sistemi dinamici discreti è stato mostrato che la complessità del linguaggio regolare prodotto dopo un certo tempo finito è una funzione non-decrescente del tempo. In altre parole, per descrivere le configurazioni generate da un sistema al passare del tempo sono necessarie regole grammaticali sempre più complicate (cioè grafi sempre più grandi). Ciò fornisce una caratterizzazione quantitativa della progressiva *autorganizzazione*, cioè emergenza di proprietà strutturali, del sistema.[42] D'altra parte sappiamo che i linguaggi non-regolari non possono essere modellizzati da un grafo

grammatica finita ma non è noto in generale a quali classi della gerarchia di Chomsky possano appartenere (in questa direzione vedi P. Kurka, «Language complexity of unimodal systems», in *Complex Systems*, vol. 10 (1996), pp. 283-300). Un approccio possibile per lo studio di tali sequenze in termini di complessità grammaticale è quello di approssimarle con grafi sempre più grandi, studiando quindi le proprietà di convergenza di tali approssimazioni. Tuttavia, la questione di una classificazione generale e, ancor di più, di una corrispondenza quantitativa tra "caoticità" e "complessità", è tuttora, largamente, *terra incognita*.

[42] Nel quadro della teoria degli automi cellulari questo fatto è stato interpretato come una generalizzazione del secondo principio della termodinamica a sistemi non-reversibili. Cfr. S. Wolfram, *op. cit.*

finito e dunque, per loro, C_{LR} diverge. Tutto ciò suggerisce che un possibile programma di classificazione del comportamento dei sistemi fisici potrebbe essere quello di stabilire una corrispondenza tra le configurazioni asintotiche generate da un dato sistema ed una grammatica particolare tra quelle elencate sopra. In tal modo, procedendo lungo la gerarchia di Chomsky si passerebbe da sistemi meno complessi a sistemi più complessi, dove adesso l'aggettivo complesso avrebbe un'accezione diversa da quella di casuale o aleatorio, e si riconduce alla complessità grammaticale o computazionale dei corrispondenti linguaggi.[43] Già un numero significativo di sistemi di interesse fisico, biologico ed artificiale sono stati ricondotti a linguaggi non-regolari.[44] In particolare certi sistemi dinamici che si trovano *ai margini del caos*. Con ciò si intende in generale il punto di passaggio tra una situazione descrivibile in termini di configurazioni periodiche e dunque "semplici", ad una in cui vi sia dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali e dunque "caos". Tipicamente questa transizione si realizza al variare di uno o più parametri presenti nel sistema[45] ed è caratterizzata dalla compresenza di strutture osservabili su diverse scale, cioè a diversi gradi di risoluzione: simbolo per simbolo, parola per parola, frase per frase ecc. e ciò, talvolta, corrisponde al fatto che l'attrattore del sistema ha una struttura frattale. Infine, sono stati studiati esempi

[43] I termini complessità computazionale e complessità grammaticale di un linguaggio formale vanno intesi, temporaneamente, nel senso abbastanza generico di difficoltà di formulare e/o di applicare le sue regole grammaticali.

[44] Per un quadro generale rimandiamo al già citato libro di R. Badii e A. Politi.

[45] Un esempio è dato dal sistema (5) con la scelta $r = r_\infty = 3{,}5699456\ldots$ Se r è più grande di r_∞, il sistema è caotico, con entropia positiva. Se invece r è più piccolo di r_∞, si può costruire una successione r_k di valori del parametro r tali che $r_k \le r_\infty$, e $r_k \to r_\infty$, con la proprietà che quando $r = r_k$ il punto critico $x = 1/2$ fa parte di un'orbita periodica super-stabile di periodo 2^k. Quest'orbita funziona da attrattore per quasi ogni altra orbita del sistema. Quando r raggiunge il valore limite r_∞, la chiusura dell'orbita del punto critico determina un attrattore, detto *attrattore di Feigenbaum*, che è un insieme di Cantor, cioè un insieme *frattale*, sul quale l'azione del sistema corrisponde all'operazione di addizionare 1 a ogni intero diadico (*adding machine*). Osserviamo che l'entropia di questo sistema è nulla. D'altra parte abbiamo già osservato (cfr. nota 27) che in questo caso l'indicatore di complessità C_{EM} è addirittura infinito. Sarebbe pertanto di estremo interesse caratterizzare questa situazione in termini di complessità computazionale.

espliciti di automi cellulari, tra questi il già menzionato *Gioco della vita*, in grado di generare sequenze di complessità grammaticale corrispondente al grado più alto della gerarchia di Chomsky. In altre parole si tratta di sistemi con la stessa potenza di calcolo di una macchina di Turing universale.

E qui ritroviamo il filo del discorso iniziato nella sezione precedente. Come abbiamo visto, un modo di predire il comportamento di un certo sistema, o di calcolarne certe proprietà a partire dal comportamento osservato, consiste nel far eseguire una certa procedura da una macchina universale. È abbastanza intuitivo che se il sistema in questione ha una complessità computazionale minore di quella della macchina universale, allora sarà in generale possibile effettuare il calcolo o la predizione in modo "abbreviato" rispetto all'evoluzione del sistema stesso. Ad esempio potremo calcolare in un tempo finito grandezze, come l'entropia o altro, che comporterebbero l'osservazione del sistema per un tempo a priori infinito. D'altra parte, se il sistema è computazionalmente equivalente a una macchina universale, allora nessuna "abbreviazione" sarà possibile. Così, in particolare, questioni riguardanti il suo comportamento asintotico potranno essere formalmente indecidibili. Ad esempio, un problema analogo al problema dell'arresto in una macchina di Turing sarà quello di decidere se una data configurazione iniziale produrrà eventualmente uno stato finale costante prestabilito. E questo problema può dunque essere indecidibile.

Allo stesso modo del calcolo della complessità algoritmica, quantità rilevanti nella caratterizzazione di un sistema, come ad esempio la sua entropia, possono risultare incalcolabili.

In forma di epilogo

Queste osservazioni, parziali e ancora poco formalizzate, mostrano come il *problema* della complessità si presenti sempre con due facce, come Giano. Appena cerchiamo di catturarne l'essenza nei fenomeni che osserviamo, mettendo in gioco gli strumenti logici e concettuali a nostra disposizione, ci accorgiamo che il nostro tentativo ci porta a parlare di questi stessi strumenti in una sorta di apparente circolarità in cui ciascuno dei termini, la complessità dei fenomeni e la complessità della nostra idealizzazione di essi, concorre a definire l'altro. In particolare, non può esistere una definizione unica e soddisfacente della complessità come ne esiste una di entropia, di energia, di temperatura, ecc. Allo stesso modo non può esistere una definizione definitiva di semplicità. Semplice e complesso sono piuttosto delle categorie, quasi delle necessità logiche, che emergono simultaneamente e in modo naturale dall'uso che di volta in volta facciamo della nostra capacità di descrivere le cose e di analizzarle per mezzo del linguaggio, sia questo formale o naturale. E questa capacità di analisi, questi strumenti d'indagine, questi modelli, potranno di volta in volta farsi più penetranti. Allora, come osservava Poincaré,

«noi scopriremo il semplice sotto il complesso, poi il complesso sotto il semplice, poi di nuovo il semplice sotto il complesso, e così di seguito, senza che possiamo prevedere quale sarà l'ultimo termine. Ma dovremo pure fermarci da qualche parte, e perché la scienza sia possibile, occorre farlo quando si incontra la semplicità. È questo il solo terreno sul quale possiamo innalzare l'edificio delle nostre generalizzazioni. Ma se la semplicità è soltanto apparente, questo terreno sarà abbastanza solido? È quanto conviene ricercare».[46]

La costruzione di idealizzazioni e generalizzazioni in grado di spiegare determinate osservazioni – tali sono i tentativi di dare definizioni formali della complessità – è sempre e comunque un atto di semplificazione "abusiva" rispetto alla realtà delle cose e in questo senso determina un limite. E sono proprio questi limiti che provocano l'apertura di scenari sorprendenti e paradossali quando si voglia forzare le regole del gioco non tenendone conto. Questo effetto di

[46] H. Poincaré, *La science et l'hypothèse*, Flammarion, Paris 1968, p. 164.

sorpresa è forse ciò che maggiormente ci fa intravvedere la natura infinitamente accidentata del confine tra semplice e complesso, tra calcolabile ed incalcolabile, tra comprensibile e non comprensibile.

«Che intendi dire? – chiese il Bruco, severo – Spiegati!».

«Temo di non potermi spiegare, Signore – disse Alice – perché, vedete, non sono io...»

«Non capisco», disse il Bruco.

«Sono spiacente di non poter essere più chiara – rispose Alice molto gentilmente – sono la prima a non capirci nulla; cambiare dimensioni tante volte in un giorno scombussola un po'».

«Non credo proprio», disse il Bruco.

«Forse perché a voi non è mai capitato – disse Alice – ma quando vi trasformerete in crisalide... prima o poi vi succederà, lo sapete... e poi in farfalla, credo che vi sentirete un tantino strano, non credete?»

«Neanche per idea», disse il Bruco.

«Va bene, forse le vostre sensazioni saranno diverse dalle mie; tutto quello che so è che io mi sentirei un po' strana».

«Tu – disse il Bruco con disprezzo – E chi sei tu?»

Con ciò la loro conversazione tornò al punto di partenza.