

SULL'ORIGINE DELL'INTERPRETAZIONE STATISTICA DELLA MECCANICA QUANTISTICA

Sandro Graffi

1. "Natura facit saltus"

La meccanica quantistica è una teoria fisica nata per descrivere determinati fenomeni microscopici in marcato contrasto con la nostra intuizione. Immaginiamo ad esempio di giocare a tennis contro un muro. Graduando con dolcezza l'impulso impresso dal braccio riusciremo a fare rimbalzare la palla tra muro e racchetta a tutte le velocità consentite dal nostro vigore muscolare. Immaginiamo ora di potere mettere al posto della palla un elettrone (o una qualsiasi altra particella subatomica). L'elettrone pesa cento miliardi di miliardi di miliardi di volte meno della palla (ci vogliono un miliardo di miliardi di miliardi di elettroni per fare un grammo). Ebbene in tal caso anche graduando l'impulso con la massima dolcezza possibile non saremmo in grado di fare rimbalzare l'elettrone a tutte le velocità minori di quella massima consentita. Egli si regolerebbe da solo in modo da assumerne solo alcune: una certa velocità ben determinata, il suo doppio, il suo triplo, il suo quadruplo, e via via tutti gli altri suoi multipli interi. Dunque non si può più passare con continuità da un valore della velocità ad uno vicino quanto si vuole, ma si deve saltare da un multiplo all'altro. Questo è l'esempio più semplice che riesco a immaginare del fenomeno fondamentale della fisica microscopica, la quantizzazione. Esso si verifica

quando le grandezze fisiche (energia, velocità, ecc.) non variano con continuità ma fanno dei salti da un valore consentito all'altro. I valori consentiti e l'ampiezza dei salti (detti salti quantici) dipendono da una quantità fondamentale in fisica, la costante di Planck,¹ detta quanto d'azione e denotata h . L'azione è il prodotto fra la velocità di un oggetto mobile, la sua massa e la distanza che ha percorso in un certo intervallo di tempo.² Il valore di h vale grosso modo l'azione compiuta dal moto di un elettrone che ha percorso un milionesimo di centimetro alla velocità di un chilometro al secondo, ed è almeno un miliardo di miliardi di miliardi di volte più piccolo delle azioni compiute nei fenomeni che osserviamo quotidianamente.

Dunque, contrariamente a quanto pensava Leibnitz, *natura facit saltus*, sempre che la si osservi su scala microscopica (cosa che Leibnitz non aveva la possibilità di fare). Il fatto che i salti quantici si verificano per davvero è una constatazione sperimentale, anche se altamente antiintuitiva. D'altra parte bisogna tenere presente (e non lo si ripeterà mai abbastanza in questo contesto) che la

¹ Dal nome di Max Planck (1858-1947), all'epoca professore di fisica teorica all'Università Humboldt di Berlino. Le osservazioni sperimentali del 1900 di H. Rubens e F. Kurlbaum, anche loro fisici di Berlino, sulla radiazione di corpo nero non si riuscivano a spiegare con la teoria classica (non è necessario per la comprensione di questo articolo cercare di descrivere gli aspetti tecnici del problema, che fanno intervenire un certo numero di nozioni avanzate). Planck introdusse una formula basata sull'idea che l'emissione e l'assorbimento della radiazione potessero avere luogo in porzioni discrete di energia pari a $h\nu$, ν era la frequenza della radiazione, e h una costante (avente la dimensione di un'energia per un tempo). La formula risultava in accordo con le osservazioni scegliendo per h un certo valore preciso, estremamente piccolo. Max Planck presentò il suo risultato ad un incontro della Società di fisica tedesca tenutosi proprio all'Università Humboldt il 14 dicembre 1900 (questo avvenimento costituisce l'atto di nascita della teoria dei quanti ma non certamente della meccanica quantistica odierna, che si sviluppò negli anni che vanno dal 1925 al 1930 soppiantando la cosiddetta teoria semiclassica di Bohr-Sommerfeld. Lo sviluppo storico della meccanica quantistica è estremamente importante per lo scopo di questo articolo e lo richiamerò nel paragrafo prossimo). Nel 1912 riuscì a dedurre teoricamente la sua formula nell'ipotesi che i valori consentiti all'energia delle piccole oscillazioni di un pendolo, al cui estremo si immagina appeso un corpuscolo microscopico, fossero tutti e soli i multipli interi e positivi di h moltiplicata per la pulsazione delle oscillazioni (nota oggi come ipotesi di Planck).

² L'azione può essere definita anche come il prodotto dell'energia posseduta dal mobile per il tempo lungo il quale lo si osserva. Questa grandezza ha una grande importanza in meccanica perché i moti effettivi sono quelli che posseggono azione minima.

nostra intuizione è basata sulle nostre percezioni dirette, cioè sui fenomeni che si conviene chiamare macroscopici, mentre il fenomeno dei salti quantici è microscopico e non può essere osservato direttamente.³ La meccanica quantistica costituisce la teoria che descrive questi fenomeni microscopici. Anche se il dibattito su certi aspetti dei suoi fondamenti è ancora aperto essa è una teoria generale e coerente, formulabile in pieno rigore matematico. Come tale, essa è dotata di potere predittivo, cioè può prevedere i risultati delle esperienze con tutta la precisione che occorre; se si preferisce, è una teoria falsificabile nel senso di Popper. Tuttavia finora non lo è mai stata; al contrario, ha superato così brillantemente tutti i tentativi di falsificazione finora tentati che da tempo non è più lecito alcun dubbio sulla piena validità di tutte le previsioni quantitative che consente nell'ambito che le è proprio. Non solo, ma alcune delle sue applicazioni principali (transistor, superfluidi, laser, ecc.) stanno alla base dell'industria microelettronica i cui prodotti hanno cambiato la nostra vita quotidiana. Dovendo però inquadrare e prevedere fenomeni per loro natura assai poco intuitivi, è fatale che non sia intuitiva nemmeno la formulazione dei suoi principi fondamentali, che infatti si allontanano sensibilmente da quelli della meccanica abituale, detta classica.

2. Meccanica classica e meccanica quantistica: contrasti e intrecci

Diversamente dai principi della meccanica classica, comprensibili da chiunque abbia frequentato con profitto una scuola secondaria superiore,⁴ quelli della meccanica quantistica possono essere

³ Si noti che fenomeno microscopico, od osservabile su scala microscopica, non vuol dire che lo si può osservare al microscopio. Si conviene anzi di chiamare fenomeno microscopico ogni fenomeno fisico la cui esistenza non può essere oggetto di osservazione visiva diretta, ma richiede dimostrazioni sperimentali di altro tipo. Ad esempio l'esistenza del fenomeno dei quanti di energia fu provato sperimentalmente da J. Franck e G. Hertz nel 1914, come si ricorderà nel prossimo paragrafo.

⁴ È sempre utile ricordarli tanto sono semplici da enunciare. Il primo è il principio d'inerzia che risale a Galileo (esistono sistemi di riferimento, detti inerziali, nei quali ogni cor-

enunciati solo tramite un linguaggio matematico avanzato. Salvo eccezioni, sono accessibili solo da chi ha frequentato almeno il primo biennio di corsi di laurea scientifici duri quali Fisica, Ingegneria, Matematica o Chimica (e talvolta nemmeno dai laureati in queste discipline). Il motivo è che la loro formulazione è solo in apparenza autosufficiente. In realtà essa deve inglobare, assieme al pesante bagaglio matematico strettamente necessario per impostare ed eseguire i calcoli, tutti quei concetti e tutte quelle nozioni provenienti dalla fisica classica (meccanica, elettromagnetismo, ottica, ecc.) che sottendono la definizione degli oggetti quantistici elementari.⁵

Tuttavia alcune delle conseguenze dirette dei principi della meccanica quantistica si possono descrivere con semplicità pari a quella dei principi classici, e contraddicono le conseguenze di questi ultimi. Gli esempi più noti sono l'interpretazione statistica e il principio di indeterminazione. Questo principio⁶ afferma che la precisione con la quale si può misurare la posizione di un corpuscolo microscopico (ad esempio un elettrone) è inversamente proporzionale a quella con cui contemporaneamente si può misurare la sua velocità. In altre parole, tanto meglio si riesce a conoscere la posizione del corpuscolo in un certo istante tanto peggio si riuscirà a determinarne la velocità (ad esempio se siamo in grado di affermare con certezza che l'elettrone si trova in un dato punto dello spazio, non

po non soggetto a forze sta in quiete o si muove di moto rettilineo uniforme), il secondo è la legge della dinamica di Newton (se un corpo viene sottoposto all'azione di una forza gli viene impressa un'accelerazione di intensità inversamente proporzionale alla sua massa, diretta come la forza e nel suo verso) e il terzo è il principio di azione e reazione (se un corpo esercita una forza su di un altro, quest'ultimo esercita una forza eguale e contraria sul primo). Una conseguenza diretta della seconda legge è che il moto di ogni corpo risulta completamente determinato nel futuro e nel passato se è nota la legge di forza alla quale è soggetto nonché la sua posizione e la sua velocità in un istante di tempo arbitrario che può essere sempre preso come istante iniziale.

⁵ Ad esempio la definizione astratta di stato quantistico puro e l'enunciato del principio di sovrapposizione sono una trasposizione diretta delle proprietà ondulatorie dell'elettromagnetismo lineare.

⁶ In realtà nella formulazione abituale non si tratta di un principio, ma di una conseguenza dei postulati sulla quantizzazione e sulla distribuzione di probabilità dei valori misurabili delle grandezze fisiche.

potremo mai dire se in quel momento sta fermo lì oppure ci sta passando, e tutte le possibili velocità di transito hanno la medesima probabilità; viceversa, se conosciamo esattamente la velocità alla quale l'elettrone si sta muovendo non possiamo assolutamente sapere in quale posizione si trova, e tutte le posizioni in cui potrebbe trovarsi sono ugualmente probabili). Si tenga però presente che la costante di proporzionalità inversa vale h . Quando h è trascurabile, come nella fisica macroscopica, possiamo misurare posizione e velocità con tutta la precisione che vogliamo e il principio di indeterminazione si riduce ad una constatazione ovvia.⁷

Se però h non è trascurabile il moto non potrà mai essere esattamente conosciuto nel senso abituale della meccanica classica newtoniana: quando si passa ai fenomeni microscopici la meccanica perde il suo aspetto deterministico. Il determinismo è una conseguenza diretta della seconda legge; esso afferma che il moto di ogni corpo risulta completamente determinato⁸ nel futuro e nel passato se si conoscono la legge di forza che imprime il moto stesso nonché la posizione e la velocità del corpo in un istante di tempo arbitrario (che può essere sempre preso come istante iniziale). Poiché se h non è trascurabile posizione e velocità iniziali del corpo non si possono conoscere entrambe esattamente, bisognerà rassegnarsi a rinunciare al determinismo classico e a cercare una conoscenza meno precisa di quella della posizione e della velocità in ogni istante. La conoscenza assicurata dalla meccanica quantistica non va oltre la cosidd-

⁷ Infatti in questo caso si riduce all'osservazione che il prodotto di due quantità maggiori o uguali a zero è sempre maggiore o uguale a zero. La "spiegazione" tradizionale del principio di indeterminazione, che risale a Heisenberg stesso, sarebbe questa: l'operazione di misura introduce perturbazioni incontrollate sull'oggetto la cui posizione o velocità si vogliono misurare. Se si tratta di oggetti macroscopici, queste perturbazioni sono senz'altro trascurabili. Se si tratta invece di corpuscoli microscopici non lo sono più. Ad esempio, ricorrendo ad un'immagine molto bella sempre di Heisenberg, se volessimo osservare la posizione di un elettrone al microscopio dovremmo in qualche modo illuminarlo, e il raggio luminoso perturberebbe certamente il moto dell'elettrone; se invece vogliamo misurare con cellule fotoelettriche posizione e velocità di un'automobile il moto di quest'ultima è del tutto insensibile agli impulsi provenienti dalle cellule. Il ruolo dell'interazione fra apparato di misura e oggetto della misura costituisce a tutt'oggi il punto di maggiore difficoltà della fisica quantistica.

⁸ Nel senso che sono predicibili posizione e velocità del corpo in ogni istante successivo e precedente quello iniziale.

detta interpretazione statistica, o probabilistica: in ogni istante non ci si può aspettare di più del potere calcolare la probabilità che l'elettrone si trovi in una qualsiasi regione dello spazio fissata a priori.⁹ Si noti che la legge di evoluzione di questa probabilità rimane deterministica, nel senso che la sua ampiezza ad ogni istante è determinata da quella iniziale; l'indeterminazione quantistica è un fatto intrinseco, completamente slegato da come i sistemi fisici evolvono nel tempo (in particolare: l'indeterminismo quantistico è un fenomeno del tutto diverso dall'imprevedibilità che si riscontra nei moti classici caotici, proprio perché quest'ultimo fenomeno trae origine dalla dipendenza estremamente delicata dell'evoluzione dalla posizione e dalla velocità iniziali).

Affermazioni come quelle precedenti si prestano facilmente ad essere formulate in astratto, dimenticando il contesto preciso dei fenomeni microscopici in cui sono nate e devono rimanere; spesso questo contesto viene trascurato perché il tenerne conto correttamente richiederebbe una preparazione tecnica non indifferente. In altre parole si proclama talvolta come verità scientifica acquisita avente valore assoluto il fatto che non si possa mai conoscere per davvero, in nessuna circostanza e non solo nella fisica microscopica, la posizione di un corpo che si muove, la sua traiettoria, e così via. Così facendo non è raro che il lettore di certe presentazioni della meccanica quantistica riporti l'impressione che questa disciplina metta in seria discussione la validità di tante nostre radicate convinzioni basate sull'intuizione, la logica e il buon senso, aprendo invece inusitate prospettive a fenomeni paranormali, ubiquità, telecinesi, esperienze mistiche varie¹⁰ non-

⁹ Interpretazione statistica e probabilistica sono sinonimi a causa della consueta visione frequentista della probabilità basata sulla legge dei grandi numeri: dato un numero stragrande di elettroni fra loro indipendenti, la frazione di questi che si trova in una data regione in un dato istante ("statistica") può essere identificata con la probabilità che un solo elettrone si trovi nella medesima regione al medesimo istante.

¹⁰ Si veda ad esempio: F. Capra, *Il Tao della fisica*, Adelphi, 1982; da questo libro traggono un'affermazione che costituisce un esempio molto chiaro delle pericolose distorsioni di pensiero che possono sorgere decontestualizzando le concezioni scientifiche: «Esplorando l'interno dell'atomo e studiandone la struttura, la scienza oltrepassò i limiti della nostra os-

ché ad identificazioni teologiche.¹¹

In realtà modifiche così profonde del modo tradizionale di concepire lo studio del moto, consolidato tramite una depurazione ed una matematizzazione durate secoli delle nostre esperienze quotidiane,¹² non sono state affatto introdotte allo scopo di liberarsi delle concezioni tradizionali per scoprire fenomeni nuovi, come talvolta si afferma o si lascia intendere. Lo scopo della loro introduzione era l'esatto opposto, cioè quello di rimanervi il più vicino possibile, inquadrando i fenomeni nuovi entro le minime modifiche agli schemi consolidati. Questo è un punto a mio parere fondamentale. Non certo per spiegare il fenomeno dei salti quantici, che può, come quasi tutti pensano, rimanere inspiegato (nel senso che può non essere riconducibile ad altri principi considerati più vicini alla nostra intuizione), ma va accettato come evidenza di fatto e basta;¹³ lo è invece per capire meglio come la teoria che lo inquadra in modo completo e matematicamente coerente, la meccanica quantistica, non abbia alcun aspetto esoterico ma sia una disciplina scientifica esatta come tutte le altre. Per fare ciò è essenziale ricostruire

servazione sensoriale. Da questo punto in poi, essa non poteva più affidarsi con assoluta certezza alla logica e al buon senso. La fisica atomica consentì agli scienziati di dare un primo rapido sguardo alla natura essenziale delle cose. Come i mistici, i fisici avevano ora a che fare con un'esperienza non sensoriale della realtà e, come quelli, dovevano affrontare gli aspetti sensoriali di questa esperienza. Da quel momento in avanti, quindi, i modelli e le immagini della fisica moderna divennero simili a quelli della filosofia orientale».

¹¹ Ad esempio il fisico inglese J. C. Polkinghorne, professore a Cambridge e vescovo anglicano, sostiene in un libro pubblicato dalla Cambridge University Press che il mistero della natura umana e divina di Cristo può essere compreso alla luce del principio di complementarità della meccanica quantistica.

¹² Il primo trattato sistematico di meccanica, nel quale vengono esposti in forma organica i metodi per impostare in termini quantitativi tutti i problemi relativi all'equilibrio e al moto di punti materiali e di corpi rigidi di comune vincolati, è la *Mécanique Analytique* di Giuseppe Luigi Lagrange (1734-1813, torinese) la cui prima edizione apparve nel 1788, esattamente 101 anni dopo la pubblicazione dei *Principia* di Newton. La meccanica quantistica odierna è invece nata come Minerva dalla testa di Giove. La sua formulazione completa, definitiva e matematicamente coerente non ha richiesto nemmeno cinque anni, quelli intercorsi fra il primo lavoro di Heisenberg sulla meccanica delle matrici apparso nel 1925 e l'uscita dei libri *Principles of Quantum mechanics* di P. A. M. Dirac (1902-1988) e *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* di J. Von Neumann (1901-1956), apparsi entrambi nel 1930.

¹³ Allo stesso modo in cui i principi della meccanica classica non possono essere "spiegati" ma devono essere accettati come evidenza di fatto: il nostro mondo è fatto così.

la genesi dei concetti fondamentali della meccanica quantistica odierna nel loro sviluppo storico, anche e soprattutto per far capire quali sono gli oggetti di cui questa disciplina si occupa e quindi, in ultima analisi, di cosa si sta in realtà parlando. Questo articolo rappresenta un tentativo di illustrare ai non specialisti la rapida e tumultuosa evoluzione di pensiero che, per interpretare coerentemente le osservazioni, ha forzatamente fatto emergere l'interpretazione statistica,¹⁴ l'aspetto più lontano dalle concezioni classiche e quindi concettualmente più significativo della nuova meccanica. L'interpretazione statistica ha come conseguenza diretta il principio di indeterminazione, e si è manifestata fin da subito come il punto più controverso e difficile da accettare nella formulazione della nuova meccanica. «Dio non gioca a dadi», diceva Einstein, il capofila di coloro¹⁵ che credevano che la scienza del moto, per continuare ad essere tale, non potesse rinunciare al determinismo.

L'intreccio fra le due meccaniche è in realtà molto più profondo e controverso di quanto di solito non si dica. Teorie nuove e più perfezionate devono contenere quelle vecchie come caso particolare, e quindi ridursi a queste ultime nell'ambito dei fenomeni comuni. Ad esempio la meccanica relativistica deve contenere la meccanica classica come caso particolare quando le velocità dei corpi in moto sono trascurabili rispetto a quelle della luce, ed in effetti le formule relativistiche si riducono a quelle classiche, in questo caso.

¹⁴ Formulata con precisione per primo da Max Born (al quale tra l'altro si deve il nome stesso di meccanica quantistica) nel 1926. Max Born (Breslavia 1882 - Bad Pymont 1970) studiò a Göttingen sotto D. Hilbert, H. Minkowski, F. Klein e H. Weber, e vi ritornò come professore di Fisica teorica nel 1920 dopo avere insegnato a Francoforte sul Meno e a Berlino. All'avvento del nazismo nel 1933 fu costretto ad abbandonare la Germania, e divenne poi professore all'Università di Edinburgo. A Göttingen ebbe come assistenti, fra gli altri, Werner Heisenberg e Wolfgang Pauli, e come allievi Pascual Jordan, Friedrich Hund, John R. Oppenheimer, Maria Göppert-Meyer. Anche Enrico Fermi trascorse qualche mese alla sua scuola nel 1925. L'interpretazione statistica è dovuta a Born e alla sua scuola; essa viene comunemente attribuita alla scuola di Copenhagen perché fatta sua fin dal principio da Niels Bohr (e dai suoi collaboratori, fra i quali per un certo periodo Heisenberg stesso) e da lui fortemente sostenuta nella polemica contro Einstein ed altri che non l'accetavano.

¹⁵ Anche altri fondatori della meccanica quantistica, come Louis Victor de Broglie e Erwin Schrödinger condividevano la posizione di Einstein. Lo stesso Planck fu sempre molto restio ad accettare l'interpretazione statistica.

Allo stesso modo la meccanica quantistica deve contenere quella classica quando la costante di Planck è trascurabile rispetto alle azioni dei sistemi considerati, ed anche qui, in effetti, le formule quantistiche formalmente si riducono a quelle classiche. Questa riduzione però è assai meno limpida di quella che ha luogo nella transizione dalla meccanica relativistica a quella classica. Se una prima teoria considerata più fondamentale deve includerne un'altra considerata meno fondamentale al suo interno come caso particolare è evidente che la prima teoria deve potere essere formulata indipendentemente dalla seconda. La meccanica relativistica infatti può essere formulata direttamente, senza passare tramite la meccanica classica. Ebbene questo non è il caso per la meccanica quantistica: pur dovendo contenere al suo interno quella classica, non ammette a tutt'oggi una formulazione indipendente da quest'ultima. Per enunciare la meccanica quantistica bisogna infatti passare per quella classica, e non si vede oggi all'orizzonte la possibilità che ciò possa essere evitato. Non solo, ma il procedimento stesso di formulazione della teoria quantistica a partire da quella classica (in gergo, la quantizzazione) offre difficoltà concettuali e matematiche tutt'altro che agevoli da superare. Molti problemi importanti di natura concettuale sono ancora aperti; uno di grande attualità consiste nel capire se e come si può manifestare in meccanica quantistica il comportamento caotico che certe evoluzioni classiche possono sviluppare nel corso del tempo.

❖ In sintesi: il processo di transizione fra la meccanica classica e quella quantistica non è affatto banale. La sua piena comprensione costituisce, a parere di chi scrive, la condizione necessaria per potere capire davvero i fondamenti della meccanica quantistica.

3. La vecchia teoria dei quanti

❖ Ho già ricordato come l'atto ufficiale di nascita della teoria dei quanti sia la formula di Planck del 1900, basata sull'ipotesi che gli scambi di energia radiante potessero avere luogo solo per multipli interi positivi di un certo valore fondamentale. Tale ipotesi fu con-

siderata all'epoca poco più che un accorgimento tecnico per risolvere un problema particolare, pur se molto importante. Questa opinione non cambiò di molto anche dopo che nel 1905¹⁶ Einstein mostrò che la formula di Planck poteva spiegare altri fenomeni che sembravano sfuggire alle leggi classiche;¹⁷ col medesimo accorgimento, l'assunzione cioè che l'energia portata da un'onda luminosa di frequenza ν fosse pari al quanto di energia $h\nu$, egli fu poi in grado di spiegare la legge principale dell'effetto fotoelettrico.¹⁸ La situazione cambiò drasticamente nel decennio 1908-1917: le scoperte sperimentali di Lord Rutherford¹⁹ sulla struttura dell'atomo motivarono la costruzione della teoria di Niels Bohr (perfezionata poi da Arnold Sommerfeld) basata sul fenomeno dei salti quantici dell'energia. Questa era una teoria nel vero senso della parola, in grado di spiegare coerentemente i fenomeni conosciuti e dotata di potere predittivo; essa rese conto in maniera brillante e convincente delle leggi empiriche sulla luce emessa dalle sostanze gassose, in particolare l'idrogeno, e permise anche di spiegare l'origine del sistema periodico degli elementi. Per di più il fenomeno dei salti quantici dell'energia trovò subito conferma sperimentale con l'esperienza di Franck e Hertz.

Il fascio di luce emesso da ogni sorgente luminosa può essere decomposto nelle sue frequenze elementari, corrispondenti ai vari colori. L'insieme di tutte le frequenze visibili, che comprende tutte le sfumature di colore che vanno con continuità dal rosso al violetto, si chiama spettro. Già negli ultimi decenni dell'Ottocento le analisi allo spettroscopio (lo strumento che, con effetto visivo simile a quello dell'arcobaleno, scinde il fascio nelle sue frequenze elementari) della luce emessa dai gas riscaldati (principalmente l'idrogeno) ave-

¹⁶ L'anno in cui pubblicò anche la sua scoperta della relatività ristretta.

¹⁷ L'annullarsi del calore specifico dei corpi solidi al tendere a zero della temperatura.

¹⁸ Il quanto di energia elettromagnetica (o, equivalentemente, luminosa: si ricordi che la luce è radiazione elettromagnetica) può essere interpretato come un corpuscolo di massa nulla che si muove alla velocità della luce, e viene chiamato fotone. Con questa ipotesi Einstein riesumò in qualche modo la teoria corpuscolare della luce di Newton.

¹⁹ Ernest Rutherford of Nelson: 1871-1937.

vano messo in evidenza il fenomeno delle righe spettrali. Lo spettro della luce emessa dai gas non presenta tutta la gamma delle sfumature di colore, ma si concentra attorno ad alcuni colori particolari, che all'analisi spettroscopica appaiono come righe parallele di colore intenso e quasi uniforme, molto ben marcate e nettamente distanziate. Uno spettro simile si dice discreto. Gli spettroscopisti (principalmente Balmer, Rydberg, Ritz) elaborarono alcune leggi empiriche molto semplici che permettevano di classificare le righe spettrali emesse dall'idrogeno e da diverse altre sostanze, e di combinare fra loro le diverse righe. Poiché si constatava che il gas riscaldato consisteva di atomi identici che potevano essere considerati come indipendenti, se ne deduceva che lo spettro luminoso osservato era quello emesso dal singolo atomo. La teoria elettromagnetica di J. C. Maxwell, H. Hertz e H. A. Lorentz identificava la luce quale radiazione elettromagnetica che si propagava sotto forma di onde di frequenze appartenenti ad un ben determinato intervallo. Come tutte le onde elettromagnetiche, le onde luminose potevano essere emesse solo da corpuscoli dotati di carica elettrica in moto accelerato o frenato, quali ad esempio gli elettroni. Verso il 1910 l'idea che la radiazione luminosa dei gas fosse dovuta al moto accelerato o frenato degli elettroni entro i singoli atomi ricevette un sostegno sperimentale solido: da una parte la determinazione della carica elettrica negativa dell'elettrone (esperienza di Millikan) e dall'altra la scoperta di Lord Rutherford che l'atomo era composto da un nucleo avente carica elettrica positiva²⁰ uguale e contraria a quella del numero di elettroni in orbita attorno a lui come in un sistema planetario in miniatura (delle dimensioni di un centomillesimo di centimetro). Tuttavia questa struttura dell'atomo non poteva spiegare gli spettri se si continuava ad ammettere la validità delle leggi classiche del moto e dell'emissione di radiazione elettromagnetica. L'elettrostatica insegnava che due corpuscoli aventi cariche

²⁰ Nel caso dell'idrogeno il nucleo è il protone, di massa circa 1840 volte quella dell'elettrone. Le esperienze di Lord Rutherford capovolsero le convinzioni sulla struttura dell'atomo, che prima di esse veniva immaginato come una carica negativa in moto all'interno di una nuvola di carica positiva (modello di J. J. Thomson).

elettriche opposte dovevano attrarsi secondo la legge di Coulomb, cioè tramite una forza proporzionale al reciproco del quadrato della loro distanza.²¹ La teoria elettromagnetica a sua volta insegnava che nel suo moto accelerato o frenato l'elettrone doveva emettere radiazione; emettendo radiazione doveva cedere energia meccanica, e rallentare così progressivamente il suo moto fino a cadere sul nucleo. In altre parole, la struttura sperimentalmente osservata non era compatibile con le leggi meccaniche ed elettromagnetiche ritenute fino a quel momento valide in ogni ambito.

Nel 1913 Niels Bohr²² introdusse due idee radicalmente nuove che resero la struttura dell'atomo osservata da Lord Rutherford in grado di spiegare in modo completo e convincente le osservazioni spettroscopiche. Inizialmente considerò solo l'atomo di idrogeno, il caso più semplice perché vi è un solo elettrone in orbita attorno al nucleo (il protone). Con le generalizzazioni del caso agli atomi di struttura più complicata egli riuscì qualche anno dopo a spiegare anche il sistema periodico degli elementi. Nel caso semplificato di moti dell'elettrone attorno al nucleo circolari e uniformi (in generale le orbite sono ellittiche, e il moto non è uniforme), Bohr fece le ipotesi seguenti:

- a) sul versante della meccanica: l'elettrone non descrive tutte le orbite consentite dalle leggi classiche del moto, ma solo quelle di raggio multiplo di un certo raggio fondamentale;²³

²¹ Dal punto di vista meccanico, questo modello dell'atomo è identico al sistema sole-planetario regolato dalla legge di attrazione newtoniana, ed i suoi moti ad energia negativa soddisfano le leggi di Keplero che governano il moto dei pianeti.

²² Niels Bohr (1885-1962), professore all'Università di Copenhagen. Oltre alla costruzione del modello di atomo che prende il suo nome e a quella della teoria semiclassica, si devono a lui idee molto importanti sulla quantizzazione del campo elettromagnetico e sulla struttura dei nuclei atomici pesanti. Influi molto sul pensiero di Heisenberg (che trascorse molto tempo a Copenhagen negli anni critici 1925-1927), collaborò con lui nel precisare il principio di indeterminazione, e fu il sostenitore più autorevole della visione indeterministica della fisica microscopica. Promosse a Copenhagen un fiorire di studi in questa direzione, al punto che l'interpretazione statistica della meccanica quantistica viene oggi attribuita alla scuola di Copenhagen dimenticando quasi del tutto che fu invece elaborata a Göttingen.

²³ In gergo, si ammette che le orbite siano *quantizzate*.

b) sul versante dell'elettromagnetismo: nel corso del moto su ciascuna orbita consentita l'elettrone non emette radiazione. L'elettrone può però saltare da un'orbita circolare a quella più vicina percorsa ad energia inferiore. In tale salto emette radiazione elettromagnetica di frequenza $\nu = (E_1 - E_2)/h$ dove E_1 è l'energia dell'elettrone nella prima orbita, E_2 quella nella seconda, e h sempre la costante di Planck. Raggiunta l'orbita fondamentale non emette più radiazione. Questa orbita corrisponde allo stato di minima energia, detto normale perché l'atomo vi si trova in assenza di perturbazioni esterne.

L'ipotesi a) è la stessa che Planck ammetteva per le energie delle piccole oscillazioni del pendolo microscopico; l'ipotesi b) equivale ad ammettere due cose: anzitutto che il processo di emissione avvenga solo istantaneamente, cioè con accelerazione infinita nel salto fra un'orbita di energia superiore E_1 e quella di energia immediatamente inferiore E_2 ; poi che l'energia della radiazione emessa, necessariamente pari a $E_1 - E_2$ per il principio della conservazione dell'energia totale, soddisfi la legge postulata da Einstein per l'effetto fotoelettrico. L'energia corrispondente ad ogni orbita può essere calcolata facilmente. Si ottiene così un insieme di valori dell'energia ben distinti l'uno dall'altro detti *livelli di energia* e i moti corrispondenti dell'elettrone sono detti *stati stazionari* (in questo caso i livelli dell'energia risultano inversamente proporzionali al reciproco dei quadrati dei numeri naturali, mentre nel caso delle piccole oscillazioni del pendolo microscopico essi sono proporzionali ai numeri naturali medesimi secondo l'ipotesi di Planck). Sostituendo nella formula $\nu = (E_1 - E_2)/h$, che dà le frequenze della radiazione emessa, i valori numerici dei livelli di energia nonché i valori conosciuti della costante di Planck, della massa e della carica dell'elettrone, Bohr ottenne esattamente la formula di Balmer per le frequenze dello spettro a righe dell'atomo di idrogeno.

Il modello atomico di Bohr trovò subito conferma tramite l'esperienza di James Franck e Gustav Hertz del 1914 che allo stesso tempo diede anche la prima verifica dell'esistenza in natura del fe-

nomeno stesso dei salti quantici.²⁴ Per descriverla, prendo a prestito le parole di Max Born:²⁵ «si portano gli atomi di idrogeno a valori determinati dell'energia bombardandoli tramite un fascio di elettroni di cui si può graduare la velocità.²⁶ Si osservano poi i salti quantici sia tramite l'improvvisa perdita di energia degli elettroni incidenti, sia tramite il contemporaneo improvviso lampeggiare di quelle righe spettrali che corrispondono alle transizioni fra i livelli raggiunti e quelli di energia inferiore».

L'esperienza di Franck e Hertz confermò al di là di ogni dubbio che la quantizzazione dell'energia non era un accorgimento tecnico, come a prima vista si era pensato per l'ipotesi di Planck, ma un fenomeno che esisteva davvero; i successi del modello di Bohr mostrarono anzi che solo il verificarsi di questo fenomeno fondamentale a livello atomico poteva spiegare in maniera convincente le osservazioni spettroscopiche.

Tuttavia la formula di Planck e il modello di Bohr non costituivano ancora una teoria nel vero senso della parola. Mancava ancora la generalità necessaria per affrontare ogni fenomeno microscopico dell'epoca (ad esempio, gli spettri luminosi a righe emessi dagli atomi sottoposti all'azione di campi magnetici, come nell'effetto Zeeman, o di campi elettrici, come nell'effetto Stark). Per il caso particolare delle piccole oscillazioni del pendolo microscopico Planck postulò la quantizzazione dell'energia; per quello dell'atomo di idrogeno Bohr postulò la quantizzazione del raggio delle orbite circolari.²⁷ Bisognava quindi determinare quali fossero le grandezze meccaniche fondamentali, sempre le stesse per ogni sistema meccanico, alle quali applicare poi il postulato della quantiz-

²⁴ Questa esperienza è unanimemente considerata una delle più importanti della storia della fisica. Essa fu immediatamente ripetuta e perfezionata da molti altri sperimentatori. Col tempo diventò una esperienza classica da ripetere nei laboratori didattici, così come quella di Fizeau sulla misura della velocità della luce. Ad esempio il Prof. Cesare Moroni che teneva allora il corso di Laboratorio di Fisica I presso l'Università di Bologna la preparava per la ripetizione da parte degli studenti alla metà degli anni '60.

²⁵ M. Born, *Vorlesungen über Atommechanik*, Julius Springer, Berlin 1925, §3.

²⁶ E quindi anche l'energia che è proporzionale al quadrato della velocità.

²⁷ Equivalente, in questo caso, alla quantizzazione del momento della quantità di moto.

zazione. Risolto questo problema, occorre poi calcolare i livelli di energia. La prima soluzione fu ottenuta da Sommerfeld²⁸ nel 1915. Con i perfezionamenti apportativi da molti altri illustri fisici,²⁹ nel 1921 il risultato finale fu una teoria, oggi nota come vecchia teoria dei quanti o teoria di Bohr-Sommerfeld, che era in grado di prevedere i livelli di energia di ogni sistema meccanico. Essa sostanzialmente riduceva il distacco dalle concezioni classiche al solo postulato di Planck. Il procedimento generale è riassunto magistralmente sempre da Max Born: «i principi della teoria quantistica consistono nel calcolo del moto secondo le leggi della meccanica classica e nel dedurre la scelta degli stati stazionari (o livelli di energia) assegnando alle variabili d'azione tutti e soli i multipli positivi della costante di Planck».

Dunque in pochi anni era stata elaborata una teoria degli effetti quantistici che si allontanava dalle concezioni classiche per lo stretto minimo assolutamente necessario. Sul versante meccanico la sola assunzione era che alle azioni competessero solo multipli interi della costante di Planck, e ciò era sufficiente per determinare i livelli di energia; sul versante elettromagnetico oltre all'ipotesi del quanto di luce di Einstein si postulava solo che l'elettrone irradiasse solo per salti quantici da un livello all'altro.

Già nel 1923 però apparve chiaro che questa teoria era inadeguata per spiegare i nuovi dati sperimentali che si erano venuti accumulando nel frattempo. I calcoli per l'energia dello stato normale dell'atomo di elio, eseguiti da Born e Heisenberg, davano risultati in contrasto con l'esperienza; per di più le osservazioni sulle righe spettrali emesse nelle oscillazioni degli atomi in molecole biatomiche (idrogeno e ossigeno) mostravano che i livelli di energia delle piccole oscillazioni del pendolo microscopico non erano

²⁸ Arnold Sommerfeld (1868-1951), all'epoca professore di fisica teorica all'Università di Monaco, dove costituì una delle scuole di fisica più importanti del secolo. Suoi allievi diretti furono, tra gli altri, Gregor Wenzel (1898-1978), Werner Heisenberg (1901-1967), Wolfgang Pauli (1900-1958), Linus Pauling (1904-1991), Hans Bethe (1903-).

²⁹ Fra gli altri: P. Debye, W. Wilson, P. S. Epstein, K. Schwarzschild, H. A. Kramers, J. M. Burgers, A. Einstein, M. Born, E. Brody.

esattamente proporzionali ai numeri interi: per riprodurre i dati sperimentali bisognava aggiungere un termine pari a $h/2$ ad ognuno dei livelli di Planck. Occorrevano dunque idee nuove. La scuola di Göttingen (Heisenberg per primo; poi, assieme a lui, Born e Jordan) trovò quasi subito (nel 1925) una strada molto soddisfacente, la meccanica delle matrici. In particolare Heisenberg ritrovò subito il termine $h/2$ da aggiungere ai livelli delle piccole oscillazioni. Un'altra strada, apparentemente diversissima ma in realtà equivalente (come fu pienamente provato pochi anni dopo dalle sintesi di Dirac e di Von Neumann) fu la meccanica ondulatoria di de Broglie e Schrödinger. Quest'ultima strada si rivelò più maneggevole dal punto di vista tecnico e prevalse quasi subito nell'uso quotidiano. Essa riduce il problema alla conoscenza della cosiddetta "funzione d'onda", che è determinabile risolvendo l'equazione di Schrödinger. È questa funzione d'onda (o più precisamente il quadrato del suo valore assoluto) l'oggetto primario dell'interpretazione statistica.³⁰

Queste "nuove meccaniche" hanno superato la "vecchia teoria dei quanti" ma non l'hanno mandata in soffitta.³¹ La teoria di Bohr-Sommerfeld, detta anche teoria semiclassica, rimane uno strumento fondamentale della fisica quantistica tanto sul piano concettuale che su quello tecnico.

³⁰ Anticipiamo qui quanto sarà ricordato in maggior dettaglio nel §4: la funzione d'onda ψ dipende dalla coordinata q del corpuscolo, e $|\psi(q)|^2$ rappresenta la distribuzione di probabilità di trovare il corpuscolo nei punti di coordinate q .

³¹ Così come la vecchia teoria dei quanti non ha mandato in soffitta la meccanica classica. Che l'affermarsi di una nuova teoria più perfezionata mandi in soffitta quelle non più adatte a descrivere fenomeni non ancora osservati al tempo della loro formulazione è un'espressione colorita che può essere talvolta giustificata a scopi di semplificazione espositiva. Non bisognerebbe però abusare di questo espediente retorico. Altrimenti si rischia di affibbiare una taccia di falsità a teorie che invece funzionano perfettamente nel loro ambito. Insomma la fisica classica non è falsa e non è affatto finita in soffitta. Semplicemente deve limitarsi a descrivere i fenomeni macroscopici, cosa che fa perfettamente; ad essa deve ridursi la fisica microscopica quando la costante di Planck diventa trascurabile rispetto ai valori delle azioni dei corpi in movimento.

4. La meccanica ondulatoria e la funzione d'onda

Nel 1923 Louis Victor de Broglie (1892-1987) introdusse, cercando una spiegazione teorica dell'effetto Compton,³² la nozione di onda di materia sulla quale si fonda la meccanica ondulatoria. Per descrivere questa nozione, ricordiamo anzitutto che secondo l'ipotesi di Einstein la luce, un fenomeno elettromagnetico di carattere ondulatorio come si è già più volte ricordato, ha anche un aspetto corpuscolare: ogni onda elettromagnetica di frequenza ν si può infatti assimilare ad un corpuscolo di massa nulla ed energia $h\nu$. De Broglie ripensò alla legge di Einstein alla luce della teoria della relatività ristretta. Essa implica che energia ed impulso di un corpuscolo sono quantità dello stesso tipo.³³ Ne dedusse che se ad ogni onda di frequenza ν si associa un corpuscolo di massa nulla ed energia $h\nu$, per coerenza si doveva associare un'onda ad ogni corpuscolo di impulso p e scrivere $p=ht$; poiché poi ν , la frequenza dell'onda, rappresenta il numero di oscillazioni nell'unità di tempo (l'inverso del periodo), t deve rappresentare il numero di onde nell'unità di lunghezza, cioè l'inverso della lunghezza d'onda λ ; ne concludiamo con de Broglie che deve valere la relazione $\lambda=h/p$. De Broglie chiamava questa onda *onda pilota* associata al corpuscolo. È conveniente farsi un'immagine concreta di un moto ondoso, ed a tale scopo ci si può riferire ad esempio alle onde del mare poiché i moti ondosi sono tutti dello stesso tipo. La lunghezza λ dell'onda è la distanza fra due creste successive;³⁴ è chiaro che essa è inversamente proporzionale alla frequenza ν (più corta è l'onda più alta è la frequenza), mentre la velocità dell'onda vale $v=\lambda\nu$ (la distanza reciproca a cui giungono due creste successive nella durata di una singola oscillazione; più vicine le creste, più veloce l'onda). Per determinare completamente un'onda occorre però un'altra quantità,

³² Arthur H. Compton osservò nel 1923 che la lunghezza d'onda luminosa variava dopo essere stata diffusa da una nube di elettroni.

³³ Per chi ha familiarità con la relatività ristretta, si allude qui al tetravettore energia-impulso, la cui componente spaziale è l'impulso e la cui componente temporale è l'energia.

³⁴ Equivalentemente, fra due ventri successivi o due nodi successivi.

l'ampiezza, la cui conoscenza permette di misurare l'altezza della cresta, e quindi l'intensità del fenomeno ondoso: agitazione del mare nel caso delle onde marine, volume del suono nel caso delle onde acustiche, potenza della radiazione (in particolare, intensità della luce) nel caso delle onde elettromagnetiche.

L'idea di de Broglie era veramente rivoluzionaria e fu ripresa immediatamente senza aspettarne una verifica sperimentale (che fu comunque ottenuta pochi anni dopo). Nel 1925 avvenne la seconda svolta fondamentale: Erwin Schrödinger³⁵ risolse il problema di come determinare l'ampiezza dell'onda pilota di de Broglie. Il problema era sottile perché³⁶ non poteva essere direttamente inquadrato nella teoria ondulatoria consueta secondo la quale l'ampiezza di un'onda deve soddisfare l'equazione della corda vibrante.³⁷ Nel caso particolare dell'onda pilota di de Broglie, Schrödinger procedette allora in analogia con l'ottica, e più precisamente con il fenomeno della rifrazione, ossia con le variazioni della velocità di propagazione delle onde luminose nella materia dovute alle variazioni di densità, temperatura, e altre proprietà delle sostanze attraversate.³⁸ L'indice di rifrazione n lungo un cammino è definito dal reciproco della lunghezza dell'onda luminosa al suo interno. Schrödinger fu condotto a questa analogia perché per sua natura l'onda pilota non può avere in generale velocità costante: infatti per la formula di de Broglie la sua lunghezza (e quindi anche la sua

³⁵ Erwin Schrödinger (1887-1961), viennese e formatosi alla scuola di Vienna, era all'epoca professore all'Università di Zurigo. In seguito successe a Max Planck sulla cattedra di Fisica teorica dell'Università di Berlino, e abbandonò anche lui la Germania all'avvento del nazismo, diventando professore all'Università di Dublino.

³⁶ Come si accorse Schrödinger medesimo in un primo tentativo di soluzione che non ebbe successo.

³⁷ L'equazione della corda vibrante, o di d'Alembert (detta anche equazione delle onde), è l'equazione differenziale che governa qualsiasi moto ondoso. Jean Le Rond d'Alembert la dedusse nel 1760 per descrivere le vibrazioni di una corda elastica fissa agli estremi, che determinano ad esempio le armoniche degli strumenti a corda.

³⁸ Un cammino ottico può essere composto da una sostanza con caratteristiche diverse da punto a punto ma anche da sostanze diverse: ad esempio tutti abbiamo presente il fenomeno di rifrazione nel passaggio della luce dall'aria all'acqua. Anche il fenomeno del miraggio è riconducibile alla rifrazione.

velocità) dipende dall'impulso p , che in generale varia al variare della posizione q del corpuscolo e della sua energia E .³⁹ L'analogia introdotta da Schrödinger consiste appunto nell'immaginare la propagazione dell'onda di materia come la propagazione di un'onda luminosa lungo un cammino ottico di indice di rifrazione variabile lungo la percorrenza; l'ampiezza di quest'onda si può poi determinare con i metodi dell'ottica ondulatoria. Nel caso delle onde di materia l'indice di rifrazione doveva essere quindi dato da p/h , il reciproco della lunghezza d'onda di de Broglie; procedendo a ritroso, Schrödinger fece l'ipotesi che l'ampiezza dell'onda di materia fosse la stessa dell'ottica con la lunghezza d'onda di de Broglie al posto del reciproco dell'indice di rifrazione. A quel punto poté scrivere almeno in un caso particolare l'equazione della corda vibrante per un'onda proprio di quell'ampiezza e quella lunghezza; imponendo che l'equazione valesse in generale, ed anche la condizione naturale in questo contesto che i profili d'onda che ne risultavano si mantenessero identici nel tempo (onde stazionarie: nell'immagine delle onde marine, si pensi ad onde il cui profilo si mantenga sempre uguale al trascorrere del tempo), ricavò e pubblicò (nel gennaio 1926) la sua equazione. Questa equazione costituisce il pilastro fondamentale dell'odierna meccanica quantistica. Essa determina dunque l'ampiezza dell'onda di materia, che Schrödinger denotò ψ , e chiamò funzione d'onda associata al corpuscolo. La ψ dipende dalla coordinata q del corpuscolo e dalla sua energia E . Schrödinger mostrò subito che la sua equazione non poteva essere risolta per ogni valore a priori attribuibile all'energia E , ma solo per certi suoi valori particolari dipendenti dalla costante di Planck h . Così facendo provò che il fenomeno della quantizzazione poteva essere fatto discendere dall'aspetto ondulatorio della materia. Per di più egli riuscì a risolvere la sua equazione in due casi particolari importantissimi: l'atomo di idrogeno e le piccole oscillazioni del

³⁹ Nel caso particolare più semplice possibile considerato inizialmente da Schrödinger, quello del punto di massa m mobile su una retta sotto l'azione di una forza di potenziale $V(q)$, la relazione fra p , q , E è data da $p = \sqrt{2m(E - V(q))}$.

pendolo microscopico. Nel primo caso ritrovò i livelli energetici di Bohr,⁴⁰ e nel secondo quelli di Planck, ma con l'aggiunta del termine $h/2$ sperimentalmente osservato e già trovato da Heisenberg con la meccanica delle matrici. Questi lavori di Schrödinger dissiparono immediatamente i dubbi gettati sulla sua equazione dalla deduzione avventurosa che egli ne dava⁴¹ e generarono l'immediato affermarsi della meccanica ondulatoria anche prima della verifica sperimentale del comportamento ondulatorio della materia. Essa fu ottenuta da C. J. Davisson e D. H. Germer nel 1927 osservando che un fascio di elettroni, incidendo su un cristallo, mostrava fenomeni di diffrazione analoghi a quelli delle onde elettromagnetiche. Il motivo principale dell'affermazione immediata della meccanica ondulatoria era strettamente tecnico: l'equazione di Schrödinger riconduceva la formulazione quantistica di ogni problema concreto di fisica atomica e molecolare (la fisica microscopica dell'epoca) ad un problema matematico di impostazione chiara che risultava risolubile, almeno in via approssimata, in molti casi particolari di grande interesse. La formulazione di Heisenberg, Born e Jordan, detta meccanica delle matrici, pur se concettualmente altrettanto importante, appariva più ostica dal punto di vista tecnico.⁴² Gli anni 1926-1928 videro dunque un tumultuoso fiorire di applicazioni della meccanica ondulatoria, riassunta nell'equazione di Schrödinger. Esse portarono alla soluzione di molti dei problemi più importanti della fisica microscopica dell'epoca, quali la determinazione degli spettri molecolari, la teoria del legame chimico, la conduzione elettrica nei metalli, la meccanica statistica quantistica e molti altri.⁴³ Riassumendo: l'idea rivoluzionaria dell'onda di ma-

⁴⁰ Come doveva, dato che i livelli di Bohr erano quelli osservati. La meccanica delle matrici non era stata in grado di eseguire questi calcoli.

⁴¹ Da questo punto di vista la situazione non è cambiata molto. Da un punto di vista rigoroso, infatti, ogni tentativo di ricavare l'equazione di Schrödinger equivale sostanzialmente ad ammetterla.

⁴² La meccanica delle matrici si era rivelata assai meno adatta della meccanica ondulatoria a trattare problemi di diffusione. Le due formulazioni sono comunque perfettamente equivalenti, nonostante sporadiche ma ripetute affermazioni del contrario.

⁴³ Nei medesimi anni furono formulate, poggiando sull'aspetto ondulatorio, anche la

teria di de Broglie era stata tradotta da Schrödinger nello strumento tecnico largamente più efficace per affrontare e risolvere i problemi concreti della fisica microscopica che avevano di fatto reso la vecchia teoria dei quanti inadeguata.

5. L'interpretazione statistica

Trovata l'equazione per l'ampiezza restava però da interpretare il significato della sua soluzione. Osserviamo per cominciare che l'equazione di Schrödinger ha la proprietà di ammettere come soluzione anche la somma di due soluzioni qualsiasi. In altre parole le ampiezze delle onde di materia condividono con le onde abituali (fluide, elettromagnetiche, sonore, ecc.) il fenomeno della sovrapposizione: la somma di due ampiezze d'onda è ancora un'ampiezza di un fenomeno ondulatorio.⁴⁴ Ho già ricordato che nei fenomeni ondulatori classici non è l'ampiezza la quantità osservata, ma l'intensità, definita dal suo quadrato.⁴⁵ Ora il quadrato dell'ampiezza misura l'intensità del fenomeno ondulatorio⁴⁶ mettendone contemporaneamente in evidenza la sua proprietà più caratteristica, l'interferenza. Supponiamo infatti di avere due onde di ampiezze A e B. Le intensità corrispondenti saranno A^2 e B^2 . Abbiamo appena detto che anche la somma $A+B$ sarà l'ampiezza di un'onda. L'intensità di quest'ultima è $(A+B)^2 = A^2+B^2+2AB$, che non vale la somma delle intensità A^2 e B^2 perché compare il termine $2AB$ detto termine d'interferenza. Quando $2AB$ è negativo l'interferenza si dice distruttiva perché l'intensità dell'onda sovrapposta è minore della somma delle due onde originali (se si tratta di onde luminose, la lu-

meccanica quantistica relativistica (P. A. M. Dirac, 1926) e la teoria dei campi quantizzati (P. Jordan e E. P. Wigner, 1927).

⁴⁴ Questa proprietà, formulata per due stati quantistici astratti, prende il nome di principio di sovrapposizione.

⁴⁵ In realtà il quadrato del suo modulo, perché in generale l'ampiezza è un numero complesso.

⁴⁶ Ricordiamo ancora che l'intensità del fenomeno ondulatorio sarà l'agitazione del mare nel caso delle onde marine, il volume del suono nel caso delle onde acustiche, la potenza della radiazione (in particolare, intensità della luce) nel caso delle onde elettromagnetiche.

ce diventa più fioca; se si tratta di onde sonore, si affievolisce il rumore). Nel caso opposto si parla di interferenza costruttiva (più luce, più rumore). Quando un fascio di luce passa attraverso una fenditura di larghezza circa pari alla lunghezza delle onde del fascio si osserva il fenomeno della diffrazione; esso comporta lo scatenarsi di una quantità di fenomeni di interferenza che generano l'alternarsi di zone di luce e d'ombra caratteristico delle figure di diffrazione. Ho già ricordato che queste figure, osservate da Davisson e Germer diffondendo un fascio di elettroni su un reticolo cristallino invece che un fascio di luce, diedero la conferma sperimentale dell'esistenza delle onde di materia.

Dunque il problema dell'interpretazione fisica di ψ si riconduceva a quello dell'interpretazione fisica di $|\psi|^2$. La prima proposta, fatta da Schrödinger medesimo, che $|\psi|^2$ moltiplicata per la carica dell'elettrone fosse la densità di corrente elettrica si rivelò intenibile. L'interpretazione a tutt'oggi accettata di $|\psi|^2$, quella statistica, fu proposta da Max Born nel 1926 stesso, appena qualche mese dopo l'uscita dei lavori di Schrödinger. Egli la propose analizzando tramite la meccanica ondulatoria un processo fisico molto concreto e importante, la diffusione degli elettroni da parte di un ostacolo.

Immaginiamo di illuminare nella notte un ostacolo opaco con un fascio luminoso potente e ben collimato (un faro della macchina, una torcia elettrica), magari monocromatico. Osserveremo che la luce si diffonderà in tutte le direzioni attorno all'ostacolo; in alcune direzioni sarà più intensa, in altre meno, a seconda della forma e delle proprietà fisiche dell'ostacolo stesso. La teoria ondulatoria, l'abbiamo appena ricordato, ci insegna che l'intensità della luce in una particolare direzione è uguale al quadrato dell'ampiezza dell'onda elettromagnetica corrispondente.⁴⁷ Per la legge di Einstein l'intensità della radiazione portata da un'onda elettromagnetica di frequenza ν è quella di un fotone di energia $h\nu$. Dunque l'intensità di ogni fascio luminoso sarà altresì proporzionale al numero di fo-

⁴⁷ Nel caso della luce il quadrato dell'ampiezza coincide con il quadrato del campo elettromagnetico trasportato dall'onda.

toni che lo compongono, che denoteremo N . L'intensità della luce diffusa in una certa direzione sarà pertanto proporzionale al numero n dei fotoni che compongono il fascio incidente deviati in quella direzione dall'ostacolo. Ora i fotoni del fascio incidente sono un numero enorme, e si può assumere che siano fra loro indipendenti, cioè che il moto di uno qualsiasi di essi non influenzi in alcun modo quello di un qualsiasi altro. Potremo allora applicare la legge dei grandi numeri ed affermare che la frazione n/N dei fotoni incidenti che hanno preso una data direzione vale la probabilità a priori (denotata p) che un singolo fotone la prenda; quindi $n=pN$. Dunque il quadrato dell'ampiezza della luce diffusa in una data direzione, riferito al singolo fotone (cioè diviso per il numero totale dei fotoni) coincide con la probabilità che un singolo fotone venga deflesso in questa direzione a seguito della diffusione.

Il processo analogo riferito ai corpuscoli, cioè la diffusione di un fascio di corpuscoli carichi tramite un ostacolo, era un problema molto studiato fin da allora perché costituisce la tecnica basilare per l'indagine sperimentale delle strutture atomiche e subatomiche (i grandi acceleratori di particelle odierni sono costruiti apposta per generare questi processi di diffusione). Fu Lord Rutherford ad inventare questa tecnica facendo incidere un fascio di particelle α , accelerate da un campo elettrico, su lamine d'oro, e proprio per suo tramite riuscì a scoprire la struttura dell'atomo. Osservò infatti che la frazione dei corpuscoli incidenti deflessi in ogni data direzione era in accordo con le previsioni della formula da lui stesso dedotta assumendo che l'atomo consistesse in un nucleo di carica positiva pari al numero di elettroni che lo circondavano, attratti dal nucleo secondo la legge di Coulomb. All'apparire della meccanica ondulatoria si poneva quindi in maniera critica il problema di ritrovare per suo tramite la formula di Rutherford, dedotta con metodi di pura meccanica classica, di cui si conosceva la validità sperimentale; una formula diversa avrebbe fatto cadere immediatamente l'intera costruzione. Il calcolo fu intrapreso per primo nel 1926 da Gregor Wenzel nel caso della legge di Coulomb e portato a termine nello stesso anno da Born nel caso generale. Il risultato era

che la formula di Rutherford rimaneva vera poiché risultava che il numero degli elettroni del fascio incidente deflessi in ogni data direzione era pari al quadrato (del modulo) della funzione d'onda di Schrödinger calcolata lungo la medesima direzione. Dunque procedendo in completa analogia al caso dei fotoni era del tutto naturale assumere che la probabilità che un singolo elettrone del fascio incidente venisse deviato in una direzione a priori stabilita fosse pari al quadrato (del modulo) $|\psi|^2$ della funzione d'onda di Schrödinger calcolata lungo la medesima direzione. Il vero colpo d'ala di Max Born consistette nell'assumere che l'analogia si estendesse ben oltre il processo fisico della diffusione, e cioè alla soluzione dell'equazione di Schrödinger in tutti i casi. Questo è un punto che vale la pena di esporre in qualche ulteriore dettaglio. La natura dei moti che hanno luogo nella diffusione di un fascio di elettroni da parte di un ostacolo è radicalmente diversa da quella del moto degli elettroni attorno al nucleo. Nel primo caso i moti possono avere luogo a qualsiasi energia positiva tanto in meccanica classica che in meccanica ondulatoria; in altre parole in questo caso la meccanica ondulatoria non genera il fenomeno della quantizzazione dei valori dell'energia, che invece si presenta nel moto degli elettroni attorno al nucleo. Inoltre nel primo caso le traiettorie classiche si estendono fino all'infinito: tipicamente gli elettroni provengono da distanze infinite, vengono deflessi dall'ostacolo e si allontanano all'infinito lungo la direzione di deflessione. Nel secondo caso si mantengono sempre a distanza finita dal nucleo perché dal punto di vista meccanico questi moti sono esattamente dello stesso tipo dei moti dei pianeti attorno al sole. Questa natura differente dei moti classici si riflette in una struttura parimenti differente delle funzioni d'onda ψ nei due problemi: nel primo caso a grandi distanze dall'ostacolo la forma della funzione d'onda è assai simile alla struttura dell'ampiezza dei più semplici fenomeni ondulatori classici.⁴⁸ Nel secondo invece $|\psi|$ si annulla all'avvicinarsi dell'elettrone al nucleo; poi cresce, torna a decrescere, e molto rapidamente, quando

⁴⁸ In queste condizioni infatti la ψ si riduce essenzialmente ad un'onda piana.

l'elettrone si trova lontano dal nucleo e poi si annulla anche all'infinito. Secondo l'interpretazione probabilistica, nel primo caso sicuramente gli elettroni raggiungeranno l'infinito, mentre nel secondo non lo raggiungeranno mai e mai cadranno sul nucleo; avranno poi probabilità piccolissima di trovarsi sia molto lontano dal nucleo che molto vicino, ed infine probabilità grande di trovarsi ad una certa distanza finita da questo. In altre parole l'interpretazione probabilistica conserva le caratteristiche qualitative del moto classico. Ciò avviene non solo nel caso della diffusione di un fascio di elettroni in moto da parte di un ostacolo, il processo fisico particolare per cui veniva del tutto spontaneo introdurla, ma anche in una situazione meccanica di caratteristiche completamente diverse: quella del moto "planetario" degli elettroni attorno al nucleo, per cui si verifica invece il fenomeno della quantizzazione dell'energia. Dunque l'interpretazione probabilistica della funzione d'onda introduce sì un elemento di casualità nella descrizione del moto, ma non certo tale da eliminare completamente il ruolo della traiettoria classica; ne conserva infatti, ripetiamo, la natura qualitativa. Non si deve in altre parole pensare che l'interpretazione probabilistica significhi che in meccanica quantistica il corpuscolo possa trovarsi più o meno dovunque, indipendentemente da dove si troverebbe seguendo il suo moto tramite le leggi della meccanica classica.

Esiste un solo caso in cui il moto quantistico possiede, come conseguenza diretta delle proprietà ondulatorie della materia, caratteristiche qualitative strutturalmente diverse da quelle del moto classico: si tratta dell'effetto tunnel. Esso consiste nella constatazione che il corpuscolo ha probabilità non nulla di attraversare zone dove classicamente non potrebbe mai arrivare, perché se ci arrivasse il quadrato della sua velocità diventerebbe negativo, cosa impossibile. In meccanica quantistica tali "zone proibite" non possono più essere usate come limiti invalicabili. Tipicamente, il corpuscolo ha probabilità non nulla di penetrare una barriera e di uscirne dalla parte opposta, come se appunto vi avesse scavato una galleria. Anche qui, però, il legame col moto classico non è completamente reci-

so: la probabilità che questo processo classicamente impossibile avvenga è molto piccola anche su scala microscopica, cioè anche se l'ordine di grandezza delle azioni dei corpi in movimento è la costante di Planck. Quanto alla rilevanza dell'effetto tunnel sulla nostra esperienza quotidiana, si immagini di lanciare una macchina al secondo verso il Monte Bianco. Bisognerà allora continuare a lanciaarne allo stesso ritmo almeno per un miliardo di miliardi di miliardi di miliardi di anni per potere dire che si è quasi certi che una di esse sia passata dall'altra parte senza attraversare la galleria. Questa attesa durerebbe un milione di miliardi di miliardi di volte più dell'età dell'universo.

Il dato di fatto che il moto quantistico si discosta poco da quello classico ammette un'espressione quantitativa generale che ha implicazioni profonde. Gli elementi di casualità dovuti agli effetti quantistici sono comunque riducibili a fluttuazioni dell'ordine di grandezza della costante di Planck attorno alle traiettorie classiche. Queste fluttuazioni attorno alle traiettorie classiche costituiscono la vera essenza dei fenomeni quantistici secondo la formulazione della meccanica quantistica di Feynman;⁴⁹ esse non sono infatti interpretabili (fatto che egli colse immediatamente) in termini dei moti variati che debbono essere presi in considerazione nella formulazione della meccanica classica tramite i principi di minimo.⁵⁰

Queste fluttuazioni imprevedibili attorno alla traiettoria classica sono invece un aspetto equivalente del fenomeno elementare della quantizzazione: riuscire a spiegarne l'origine equivarrebbe infatti a capire l'origine di questo fenomeno, e ogni tentativo di formulare

⁴⁹ Richard P. Feynman (1917-1989), forse il maggior fisico della seconda metà del Novecento, elaborò negli anni '40 una rappresentazione della meccanica quantistica particolarmente profonda ed illuminante, che si è rivelata anche la più adattabile a situazioni molto complicate quali la teoria dei campi quantizzati. A mio parere essa è fra tutte la presentazione più soddisfacente; purtroppo è inscindibile dal suo strumento tecnico, l'integrale di Feynman, la cui costruzione non può essere riassunta, nemmeno molto succintamente, senza fare riferimento ad un vasto bagaglio di cognizioni tecniche.

⁵⁰ La meccanica classica può essere dedotta dal principio di minima azione di Maupertuis-Hamilton-Jacobi. Esso afferma che fra tutte le traiettorie geometricamente possibili e meccanicamente percorribili (detti moti variati) che congiungono due punti assegnati, la legge di forza costringerà il mobile a percorrere quella che possiede l'azione minima.

la meccanica quantistica evitando l'interpretazione statistica⁵¹ della funzione d'onda deve tenerne conto introducendo un'assunzione che ne giustifichi l'esistenza.

5. Conclusione

Abbiamo riassunto la deduzione della meccanica quantistica nella versione ondulatoria di de Broglie e Schrödinger; fu una deduzione piuttosto avventurosa, tramite analogie azzeccate e generalizzazioni fortunate. Queste furono introdotte però sempre nell'intendimento di staccarsi il meno possibile dalla fisica classica, sola ed unica fonte delle analogie medesime. Da un'altra di queste analogie è stata poi tratta l'interpretazione statistica. La deduzione della meccanica quantistica nella versione matriciale di Heisenberg, Born e Jordan non fu certo più limpida; tuttavia l'intendimento era il medesimo. Nonostante l'avventurosità della deduzione le cose funzionarono fin da subito impeccabilmente nel confronto con i dati sperimentali. Dirac inquadrò quasi immediatamente le formulazioni ondulatorie e matriciali come aspetti particolari fra loro equivalenti della sua teoria generale; contemporaneamente, ed indipendentemente, Von Neumann formulò questa teoria generale in un linguaggio matematico assolutamente rigoroso e coerente, basato su principi enunciabili senza ambiguità e su proprietà matematiche da sottoporre a verifica in ogni caso concreto. Tuttavia l'edificio della meccanica quantistica, costruito con tanta rapidità, apparve fin da subito molto solido sì, ma anche di architettura non molto soddisfacente da un punto di vista estetico; essa rimaneva infatti molto lontana dall'eleganza geometrica e dalla semplicità concet-

⁵¹ Ogni tentativo di formulazione alternativa della meccanica quantistica deve naturalmente essere equivalente, nelle sue previsioni quantitative, a quella tradizionale (equazione di Schrödinger e interpretazione probabilistica). L'atteggiamento dei professionisti del mestiere verso le formulazioni alternative è molto meno dogmatico e assai più pragmatico di quanto in generale non si pensi. Esse sono ben viste se forniscono strumenti tecnici efficaci per affrontare problemi che si presentano difficili con i metodi tradizionali. Ad esempio la meccanica stocastica di Edward Nelson (1965) ha annoverato ed annovera diversi cultori che se ne sono serviti per risolvere problemi importanti.

tuale della fisica classica, la meccanica newtoniana e l'elettromagnetismo di Maxwell in particolare, e anche della teoria della relatività ristretta e generale di Einstein. Uno dei motivi è sicuramente il rapporto controverso con la meccanica classica che abbiamo cercato di delineare in precedenza.

Per di più la meccanica quantistica ha fatto sorgere fin dall'inizio controversie molto serie su certe sue assunzioni fondamentali (principalmente l'indeterminismo come conseguenza del processo di misura delle grandezze fisiche). Non voglio qui fare nemmeno un accenno alla questione dei fondamenti della meccanica quantistica, toccata nell'articolo di Pietro Greco. Mi limito solo ad osservare che negli ultimi tempi l'atteggiamento della maggioranza dei professionisti del mestiere si sta allontanando dalla posizione FAPP.⁵² È vero che tipicamente il professionista non amava il dibattito sui fondamenti perché aveva la sensazione (ed era difficile dargli torto) di non trarne alcun giovamento nel suo lavoro quotidiano.⁵³ A più di settant'anni dalla sua nascita, però, la meccanica quantistica ha conseguito successi sperimentali spettacolari da una parte, e dall'altra si è progressivamente consolidata sul piano concettuale e metodologico (anche attraverso la formulazione di quasi tutte le sue parti in termini matematici semplici e rigorosi). I risultati e le predizioni di questa teoria non sono più da tempo oggetto di discussione. Essa ha così acquisito un rango tale da fare capire che il dibattito sui suoi fondamenti era davvero utile per la sua piena comprensione. Infatti esso aumentava la consapevolezza delle possibilità e dei limiti della teoria e non rischiava invece di confondere inutilmente le idee, come molti avevano temuto. Questo dibattito ha messo in luce, se non altro, come le basi della meccanica quantistica non siano ancora del tutto sicure. Cito testualmente dal trattato di A. Ga-

⁵² Nell'articolo di Pietro Greco viene ricordata l'abbreviazione FAPP (*For All Practical Purposes*: per tutti gli scopi utili in pratica) che sta ad indicare la posizione di chi ritiene inutile una discussione approfondita dei fondamenti della meccanica quantistica poiché la formulazione attuale è sufficiente per qualsiasi uso pratico della disciplina.

⁵³ Al contrario, poteva addirittura temere di riportarne un danno vedendo messe in discussione alcune certezze raggiunte con fatica senza che fossero sostituite da altre parimenti utili nel suo lavoro.

lindo e P. Pascual: «*nonostante gli indubitabili e impressionanti successi riportati dalla meccanica quantistica [...] una formulazione completa e priva di ambiguità della nostra teoria fisica più fondamentale è tuttora mancante*». ⁵⁴

La mia posizione in proposito è quella espressa nel §2: una formulazione completamente soddisfacente della meccanica quantistica richiede la piena comprensione del processo di transizione fra meccanica classica e quantistica. Non è detto che ciò sia possibile, ma la storia recente della fisica matematica mette in luce un precedente notevolissimo di piena comprensione di due aspetti apparentemente contraddittori: la riconciliazione fra reversibilità della dinamica microscopica classica e irreversibilità della tendenza macroscopica all'equilibrio avvenuta alla metà degli anni '70. In quegli anni Oscar E. Lanford riuscì a portare a termine gli annosi tentativi di capire in quale modo l'equazione di Boltzmann, che descrive la tendenza irreversibile all'equilibrio dei sistemi macroscopici classici, poteva essere fatta discendere dalle equazioni di Newton che descrivono l'evoluzione temporale reversibile di ciascuno dei loro componenti microscopici. La costruzione di Lanford ha rappresentato il coronamento di un ampio filone di ricerca durato un secolo, e ha posto fine ad una controversia che era durata il medesimo lasso di tempo, poiché si era accesa al momento stesso in cui Boltzmann dedusse la sua equazione nel 1872. Sono passati appena 75 anni dalla nascita della meccanica quantistica. La riconciliazione fra determinismo classico e indeterminismo quantistico, se mai vi sarà, potrebbe tardare ancora a lungo.

⁵⁴ *Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, 1990 (2 voll.). Traduzione della II edizione spagnola del 1989. A mio parere è questo il miglior trattato di meccanica quantistica apparso negli ultimi 30 anni.