COSA SI INTENDE PER CAOS? PASSATO E PRESENTE

Sandro Graffi

Nel linguaggio quotidiano la parola *caos* è sinonimo di confusione, e comportamento caotico è sinonimo di comportamento irregolare o impredicibile. Comportamenti simili si manifestano assai spesso in fisica, ingegneria, biologia, economia ed altre scienze. Il punto che vogliamo sviluppare è il seguente: il comportamento caotico può essere definito in modo non ambiguo, e determinato in modo preciso, solo tramite la verifica di certe proprietà matematiche che cercheremo di delineare. Cercheremo inoltre di mettere in evidenza come, contrariamente all'intuizione elementare basata sulle nostre esperienze quotidiane, i comportamenti caotici siano spesso di grande aiuto, e talvolta necessari, nell'impostare la soluzione di molti problemi di grande interesse e pari complicazione.

È un fatto intuitivo che la descrizione di un comportamento irregolare o impredicibile (sarebbe meglio dire, come proveremo a chiarire in seguito, così difficilmente predicibile da risultare impredicibile ad ogni effetto pratico) debba far ricorso in misura essenziale alla teoria della probabilità. Per introdurre e motivare concretamente le considerazioni che seguiranno a questo proposito conviene seguire la via storica.

Il primo esempio fondamentale nella scienza moderna in cui i comportamenti caotici e le considerazioni probabilistiche atte a descriverli rendono possibile la comprensione del fenomeno è rappresentato dalle teorie di Maxwell e Boltzmann che rendono conto della termodinamica di equilibrio di un gas diluito e della tendenza irreversibile a raggiungere l'equilibrio al trascorrere del tempo.

Verso la metà del secolo scorso fu definitivamente chiarito che le leggi chimiche fondamentali dei gas (Avogadro, Dalton, Gay-Lussac) potevano avere una spiegazione ragionevolmente semplice solo ammettendo *l'ipotesi atomica*: il corpo gassoso macroscopico non è un continuo ma è composto da un numero grandissimo (dell'ordine di grandezza del numero di Avogadro: 10^{23} costituenti per una mole di gas) di costituenti elementari (microscopici), atomi o molecole a seconda dei casi. I costituenti (per semplicità identici e quindi di ugual massa m, chiamati anche particelle), devono così muoversi secondo le leggi della meccanica Newtoniana. Se così è, i comportamenti macroscopici del gas, cioè principalmente le leggi termodinamiche che descrivono lo stato di equilibrio (ad esempio, la legge di Boyle che afferma la proporzionalità inversa fra pressione e volume se il gas è perfetto) e la tendenza irreversibile a raggiungerlo devono essere spiegati tramite i movimenti dei costituenti elementari. In linea di principio il moto di ogni costituente è perfettamente noto in ogni istante passato e futuro se sono note le forze a cui è sottoposto assieme *alle condizioni iniziali.* Le condizioni iniziali sono la posizione del costituente e la sua velocità ad un istante qualsiasi, che si può sempre scegliere come istante iniziale. Questo è il famoso determinismo della meccanica Newtoniana (noto anche sotto il nome di determinismo laplaciano, perché fu P.S. Laplace il primo a formularlo con chiarezza): la conoscenza della legge di forza e delle condizioni iniziali determina il moto in ogni istante successivo e precedente. Le leggi di forza si possono sempre considerare conosciute, almeno su basi empiriche. L'assunzione su basi empiriche di una legge di forza o di un'altra specifica il modello di gas che si studia; ad esempio nel *gas perfetto* si assume che le forze siano nulle. È sicuramente irrealistica, invece, l'idea di potere misurare esattamente tutte le 10^{23}¥10^{23} condizioni iniziali necessarie per individuare il moto di ciascun costituente: si pensi che ciò richiederebbe la capacità di misurare la velocità o la posizione di una qualsiasi delle particelle con una precisione di 10^{23} cifre: si ricordi che 10^{23} significa 1 seguito da *ventitre* zeri! (È bene far notare qui, onde evitare i malintesi che talvolta hanno luogo su questo punto specifico, che questa considerazione non ha nulla a che fare con il principio di indeterminazione della meccanica quantistica. Quest'ultimo infatti afferma, come verrà richiamato in seguito, l'impossibilità *concettuale* di potere misurare contemporaneamente ed esattamente posizione e velocità di un punto mobile, mentre in questo caso la possibilità concettuale esiste, come sempre nella meccanica Newtoniana.

Se si rinuncia all'individuazione del moto di ciascuna particella occorre inquadrare in una descrizione probabilistica il moto dei costituenti elementari. Da Maxwell (1860) in poi lo si fa introducendo la cosiddetta funzione di distribuzione $f(\mathbf{r},v;t)$ definita così:

$f(\mathbf{r},v;t)$ = (numero di molecole con posizione in un cubetto attorno a **r**; e velocità in un cubetto attorno a v all'istante t)/(numero totale di molecole).

In parole: $f(\mathbf{r},v;t)$ è la frequenza con la quale le particelle visitano (all'istante t) il dato volumetto nello spazio delle posizioni e delle velocità (noto come *spazio delle fasi*). Essendo $f(\mathbf{r},v;t)$ una frequenza, per la legge dei grandi numeri essa tenderà, se il numero delle particelle è molto grande (come in questo caso), alla probabilità che *una sola* particella sia nel volumetto all'istante t, nell'ipotesi che posizioni e velocità di tutte le particelle siano in ogni istante fra loro statisticamente indipendenti (due eventi sono tra loro statisticamente indipendenti quando la probabilità che entrambi si verifichino vale il prodotto delle probabilità che uno dei due si verifichi indipendentemente dall'altro).

f si dice distribuzione di equilibrio se non dipende dal tempo t, e lo stato corrispondente del sistema *stato di equilibrio*. In assenza di forze fra le particelle (gas perfetto), nell'ulteriore ipotesi le componenti della velocità di una (e quindi di tutte) le particelle siano fra loro statisticamente indipendenti J.C. Maxwell (1860) ricavò la distribuzione di equilibrio f_M (la Maxwelliana) da cui dedusse la termodinamica del gas perfetto, cioè la legge di Boyle (il prodotto della pressione per il volume è proporzionale alla temperatura assoluta), tramite le definizioni statistiche di temperatura (assoluta) come valore medio dell'energia cinetica delle particelle e della pressione come valore medio dello scambio di quantità di moto con le pareti del contenitore (l'energia cinetica di un punto materiale di massa m che si muove alla velocità v vale $mv^2/2m$; l'energia cinetica di un sistema di N punti la somma di quelle di ciascun punto; la quantità di moto di un punto materiale vale il prodotto mv della massa per la velocità).

La nostra esperienza quotidiana ci dice che se immettiamo del gas in un contenitore vuoto tramite una fenditura nelle pareti, dopo un certo tempo esso si diffonderà uniformemente, e non succederà mai che riattraversi la fenditura per tornare ad uscire. Questo è un esempio semplicissimo di tendenza all'equilibrio *irreversibile*: il gas, una volta raggiunto l'equilibrio, non se ne discosta più. Il problema di spiegare questo fenomeno tramite i moti dei costituenti elementari è sottile e profondo, e fu essenzialmente risolto da Ludwig Boltzmann (1844-1906) qualche anno dopo la determinazione della distribuzione di equilibrio di Maxwell.

Egli introdusse delle ipotesi sulle azioni reciproche fra i costituenti elementari assai più realistiche, in cui i costituenti potessero urtarsi elasticamente, aggiungendovi la seguente ulteriore ipotesi di natura statistica: la probabilità dell'urto fra due costituenti è statisticamente indipendente dalla posizione in cui si trovano. (Più precisamente: non debbono esistere correlazioni fra posizioni e velocità che rendano certi urti più probabili di altri). Nel 1872 Boltzmann dedusse, basandosi su questa ipotesi, nota non a caso come *ipotesi del caos molecolare* (anche se lui la chiamava *Stosszahlansatz*, cioè assunzione sul numero degli urti) l'equazione integro-differenziale non lineare soddisfatta dalla funzione di distribuzione $f(\mathbf{r},v;t)$ che porta il suo nome. Definendo tramite $f(\mathbf{r},v;t)$ l'entropia dinamica Boltzmann dimostrò poi («Teorema H») che se f soddisfa la sua equazione l'entropia dinamica non decresce mai al trascorrere del tempo. La crescita dell'entropia corrisponde ad un comportamento *irreversibile* del sistema: l'evoluzione nel futuro è differente da quella nel passato. Si noti che i moti dei costituenti elementari sono invece tutti reversibili: essi infatti sono regolati dalla meccanica Newtoniana, che genera sempre evoluzioni in cui il passato è dinamicamente identico al futuro (si pensi al moto di un pendolo: scambiare il futuro con il passato significa semplicemente invertire il senso delle *medesime* oscillazioni). Conseguenza del teorema H, e pertanto dell'irreversibilità, è che f(**r**,v;t) deve necessariamente tendere alla distribuzione di equilibrio di Maxwell quando il tempo t tende all'infinito (tendenza irreversibile all'equilibrio).

Questa teoria sollevò fin dall'inizio contrasti violenti nella comunità scientifica dell'epoca, a causa della contraddizione apparentemente insanabile fra l'irreversibilità che essa comporta e la reversibilità della dinamica microscopica Newtoniana dalla quale essa proviene. La risoluzione di questa contraddizione ha richiesto più di un secolo (una parola definitiva in proposito è stata detta da O.E. Lanford nel 1974), nel corso del quale, d'altra parte, l'equazione di Boltzmann ha trovato innumerevoli applicazioni.

Le ipotesi alla base delle deduzione della distribuzione di Maxwell e dell'equazione di Boltzmann sono di natura probabilistica. Il loro significato intuitivo è: tutto ciò che a priori è dinamicamente possibile deve avere la medesima probabilità di accadere.

Grosso modo questa nozione è quella che si avvicina di più all'idea intuitiva che abbiamo di comportamento caotico: se il comportamento del sistema avesse qualche regolarità (ad esempio, delle periodicità significative) certe regioni dello spazio sarebbero raggiunte con certezza mentre altre non lo sarebbero mai, e il comportamento diventerebbe assai facilmente predicibile almeno sotto certi aspetti. Si pensi ad esempio ad un biliardo ideale (nel quale cioè si trascuri l'attrito, e l'urto con le pareti sia perfettamente elastico) e si consideri il moto in cui la palla, lanciata da un lato, torni esattamente al punto di partenza e ne riparta con la medesima direzione dopo essere stata riflessa dal lato opposto. Si avrà un moto periodico: la traiettoria sarà un segmento fra i lati opposti e nessuno dei punti fuori dal segmento sarà mai raggiunto durante il moto.

Non è affatto detto, si badi bene, che queste ipotesi vengano soddisfatte da un sistema specifico assegnato a priori; al contrario, la loro verifica costituisce di solito un problema matematico di considerevole difficoltà. Se lo sono, potremo dire che quel sistema rappresenta un esempio concreto di comportamento caotico.

Come si è ricordato, nel caso della teoria dei gas di Boltzmann queste ipotesi sono soddisfatte, ed è quindi il «caos» che permette di dedurre il comportamento macroscopico del gas dalla sua struttura macroscopica perché elimina la necessità di conoscere le 2 ¥ 10^{23} condizioni iniziali dei costituenti elementari necessarie per determinare i moti che a loro fanno seguito.

La lezione che si trae da questo esempio fondamentale della fisica è che il caos è tanto più gradito quanto più si è costretti a rimpiazzare i comportamenti individuali, troppo difficili da determinare con precisione sufficiente per lungo tempo, con quelli in media statistica, calcolabili a priori. Infatti l'errore che si farà rimpiazzando il comportamento individuale con la media statistica sarà tanto più piccolo quanto più il comportamento del sistema sarà caotico.

Nello sforzo di convincere la comunità scientifica del suo tempo che la deduzione dinamica delle proprietà di equilibrio della materia gassosa poggiava su basi solide, Boltzmann introdusse in seguito anche un metodo diverso e più generale per descrivere l'avvicinamento all'equilibrio, a priori disgiunto dall'irreversibilità. Esso è basato su un concetto rivelatosi molto profondo, come provato dal progresso di oltre un secolo di fisica e di matematica, e cioè quello di *sistema ergodico*. La proprietà di ergodicità è anch'essa di tipo statistico, e grosso modo afferma che, quale che sia il punto di partenza (nel caso considerato sopra, quali che siano le posizioni e le velocità iniziali dei costituenti), l'evoluzione del sistema è tale che prima o poi i suoi punti soggiorneranno in ogni regione a priori raggiungibile per un tempo tanto più lungo quanto maggiore è l'area della regione. Questa proprietà, che può essere rifrasata dicendo che, quale che sia il dato di partenza, prima o poi l'evoluzione del sistema ha uguale probabilità di passare per un qualsiasi punto dello spazio nel quale essa ha luogo, è assolutamente necessaria per il comportamento caotico, ma ben lungi dall'essere sufficiente. Il comportamento caotico è definito da proprietà statistiche più forti (che implicano cioè l'ergodicità senza esserne implicate) come ad esempio la proprietà di *mescolamento*. Essa grosso modo significa che, quale che sia il dato di partenza, e date due regioni dello spazio, gli eventi che l'evoluzione dell'uno passi anche per l'altro diventano prima o poi statisticamente indipendenti. Esistono proprietà anche più forti (la proprietà K, la proprietà di Bernoulli, ecc): ne omettiamo anche una vaga definizione per non eccedere in tecnicismo, limitandoci solo a ricordare che esse sono tanto più forti quanto *più la dipendenza dell'evoluzione dal dato di partenza è delicata.*

È proprio questa dipendenza delicata dal dato di partenza a determinare l'impredicibilità ad ogni effetto pratico ricordata prima. Il motivo è chiaro: se l'evoluzione di due dati di partenza che differiscono di tanto poco quanto si vuole può diventare completamente diversa al trascorrere del tempo è chiaro che l'evoluzione medesima potrà essere effettivamente determinata solo se il dato di partenza è conosciuto con precisione arbitrariamente grande.

Si noti poi che per osservare il comportamento caotico in generale ci sarà da aspettare molto: in altre parole il comportamento caotico non è transiente ma di lungo periodo. Inoltre esso non potrà mai avvenire se quando si può stabilire a priori che la dipendenza dal dato iniziale non è delicata. (Sempre nel caso in cui il sistema sia definito da un'equazione differenziale, ciò avviene quando si ha stabilità rispetto alle variazioni delle condizioni iniziali).

Questi concetti sono stati in realtà sintetizzati nel novecento (a parte le straordinarie intuizioni di Henri Poincaré, 1854-1912, che non solo in questo campo era un secolo avanti il suo tempo, come assodato dalla moderna teoria dei sistemi dinamici. Si cercherà di fare un cenno ad una delle sue scoperte fondamentali in seguito). Nel novecento, per di più, è stato compiuto il passo fondamentale per gli odierni studi sul caos, e cioè la scoperta che per osservare comportamenti caotici non occorreva necessariamente fare intervenire sistemi composti da un grandissimo numero di particelle, quali quelli considerati da Maxwell, da Boltzmann e dalla meccanica statistica da loro creata. Potevano bastare, in base al meccanismo della dipendenza delicata dalle condizioni iniziali (che in qualche modo, per loro natura, è sempre presente nei sistemi a grandissimo numero di costituenti), anche sistemi infinitamente più semplici da immaginare e da costruire, e soprattutto, visti con gli occhi di oggi, tali da potere essere analizzati al calcolatore.

Se la causa fondamentale del manifestarsi del comportamento caotico di un'evoluzione è comunque da ricercarsi nella sua dipendenza delicata dai dati di partenza, i meccanismi che generano questa dipendenza delicata possono essere assai diversi. Uno di questi è l'esistenza del cosiddetto *attrattore strano*, nozione isolata da D. Ruelle e F. Takens nel 1971 nel quadro dei tentativi di spiegare l'insorgere del moto turbolento nei fluidi tramite approssimazioni fisicamente assai significative delle equazioni di Navier-Stokes. Le equazioni di Navier-Stokes, che possono essere dedotte anche dall'equazione di Boltzmann, sono le equazioni differenziali alle derivate parziali non lineari che descrivono il moto dei fluidi viscosi, quali sono ad esempio i gas dell'atmosfera, se essi vengono considerati come corpi continui. Un problema sul tappeto da molti anni è quello di determinare se i moti turbolenti sperimentalmente osservati possono essere inquadrati teoricamente come soluzioni di queste equazioni. L.D. Landau e E.M. Lifshitz e, in seguito, E.N. Lorenz hanno isolato delle approssimazioni opportune delle equazioni di Navier-Stokes che permettevano di affrontare il problema tramite la teoria dei moti caotici. L'origine nell'attrattore strano di questi moti caotici è stata infine individuata da Ruelle e Takens. Si tratta qui di sistemi *dissipativi* (perché l'energia non si conserva, anzi, si «dissipa»), strutturalmente differenti da quelli *conservativi* di cui si occupa la teoria ergodica sopra ricordata. Essi compaiono (le semplici equazioni differenziali che li reggono sono le stesse) nella teoria delle oscillazioni dei circuiti elettrici, nella teoria degli equilibri biologici fra varie specie, in vari modelli di sviluppo-recessione in economia, e in altri casi ancora.

Molti dei risultati sul comportamento caotico di simili sistemi sono stati ottenuti in via preliminare tramite esperimenti numerici, risolvendo al calcolatore le equazioni differenziali in esame. Queste ultime possono essere ulteriormente semplificate per dare origine ad iterazioni di mappe. (La locuzione «iterazione di mappa» è un tecnicismo per abbreviare il concetto di composizione multipla di una funzione, detta anche mappa, con sé stessa. Si consideri ad esempio la funzione $f(x) = k\,x(1-x)$, dove k è un numero reale compreso fra 0 e 4, definita sull'intervallo $0<x<1$, detta «mappa logistica». Iterare la mappa n volte significa comporre n volte la funzione f con sé stessa. Scelto cioè un punto a qualsiasi fra 0 e 1, le iterate successive sono definite così:

$f^2 = f(f(a))$, $f^3 = f(f(f(a)))$, $f^n = f(f(f(\ldots f(a)..)$ n volte.

Allo stesso modo vengono costruite le iterazioni di mappe più complicate, definite ad esempio da funzioni dal piano in sé come la mappa di Hénon, o da funzioni del piano complesso in sé. L'evoluzione ottenuta iterando le mappe si chiama anche dinamica discreta, perché si può sempre immaginare di ottenerla da una evoluzione temporale consueta osservandola solo ad intervalli di tempo fissati, ad esempio ogni secondo. Le iterazioni di mappe, che rappresentano comunque sistemi di grande interesse di per sé, danno origine ad un'evoluzione che pur presentando gli stessi aspetti di dipendenza delicata dai dati di partenza è più facile da analizzare, specie al calcolatore, al punto che è possibile talvolta determinare esplicitamente la forma e le principali caratteristiche degli attrattori strani. Questi sono insiemi di struttura molto complicata: nei casi più studiati sono dei *frattali*, i cui esempi più semplici sono costituiti dagli insiemi di Cantor. Essi furono introdotti dal matematico G. Cantor, padre della moderna teoria degli insiemi, circa un secolo e mezzo fa in un contesto molto diverso.

Anche i sistemi dissipativi possono però avere stati stazionari, o di equilibrio. Si pensi ad un filo percorso da una corrente elettrica. Una certa quantità di energia viene dissipata sotto forma di calore per effetto Joule, ma lo stato del sistema è comunque stazionario. Era un importante problema aperto, fino a pochi anni fa, il descrivere gli stati di equilibrio di simili sistemi dissipativi con i metodi probabilistico-statistici della teoria ergodica, che permettono di sostituire i comportamenti statistici medi a quelli individuali. Tuttavia una delle direzioni di ricerca più promettenti di questi ultimi anni (sviluppata principalmente da E.C.D. Cohen, G. Gallavotti e D. Ruelle), e da loro chiamata «ipotesi caotica», sembra definitivamente portare al risultato inatteso di consentire questa possibilità, e quindi di potere stabilire una meccanica statistica anche per i sistemi dissipativi. Ciò aprirebbe nuove e vaste prospettive anche per tutte le discipline, quali l'ingegneria elettronica, la biologia, l'economia, i cui modelli matematici più diffusi sono costituiti da equazioni differenziali dissipative.

Un meccanismo ancor più delicato e profondo per generare il comportamento caotico ha luogo in sistemi conservativi anche di una semplicità sorprendente, quali ad esempio un pendolo matematico sottoposto all'azione di una spinta periodica.

Si tratta del meccanismo detto del *punto omoclinico*, perfettamente chiaro a Poincaré già nel 1899, la cui profondità è stata però compresa appieno solo in tempi recenti.

Questo meccanismo è basato sull'osservazione che attorno a configurazioni di equilibrio di un certo tipo (l'esempio più semplice è la configurazione di equilibrio instabile del pendolo al sommo della verticale) possono formarsi certe evoluzioni (le cosiddette varietà stabile e instabile, che nel caso del pendolo semplice sotto l'azione della spinta sono delle curve) che generano un meccanismo caotico certamente impossibile da descrivere con parole più chiare di quelle dello stesso Poincaré (H. Poincaré, *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, vol. III, Paris, Gauthier-Villars, 1899; ristampato da Dover Publications, New York 1957, e da Albert Blanchard, Paris 1990; Cap. XXXIII, p. 389; traduzione mia):

> Si provi a rappresentarsi la figura formata da queste due curve e dalle loro infinite intersezioni [...]. Queste intersezioni formano una specie di reticolo, di tessuto, di rete a maglie infinitamente strette; ciascuna delle due curve non può mai riattraversarsi, ma deve ripiegarsi su sé stessa in una maniera molto complessa per venire ad attraversare un'infinità di volte tutte le maglie della rete.
> Si resterà colpiti dalla complessità di questa figura, che non cercherò nemmeno di tracciare.

Oggi il calcolatore ci viene in aiuto per mostrare anche a noi quello che Poincaré vedeva con la sola sua immaginazione geometrica cent'anni fa.

Si sa dall'inizio di questo secolo che la legge dinamica sulla quale basare le considerazioni statistiche, accennate prima, atte a ricavare il comportamento macroscopico della materia gassosa a partire dalla struttura microscopica, può essere quella Newtoniana, cioè quella classica, solo se la temperatura assoluta non è troppo bassa. Ciò equivale, come abbiamo visto, a dire che l'energia cinetica media dei costituenti è elevata. Questo non si verifica quindi a temperature vicine allo zero assoluto, o equivalentemente quando le azioni in gioco sono dell'ordine di grandezza della costante di Planck. L'azione è infatti proporzionale alla velocità. In queste ultime condizioni la legge del moto classica deve essere sostituita da quella quantistica, e quindi le equazioni di Newton da quella di Schrödinger. Il problema di dedurre il comportamento macroscopico della materia da quello microscopico sussiste però inalterato, e va con lui quello di individuare i meccanismi, necessariamente caotici, su cui basare la deduzione.

È questo il tema principale della cosiddetta teoria del *caos quantistico* che ha avuto uno sviluppo tumultuoso negli ultimi 15-20 anni, e che ha acquistato il significato più generale di investigazione delle proprietà dei sistemi quantistici il cui analogo classico sviluppa moti caotici. Qui si presenta un'ostruzione di principio. Abbiamo visto che l'origine del comportamento caotico delle evoluzioni classiche è da individuare nella dipendenza delicata dalle condizioni iniziali. A sua volta questa dipendenza delicata potrà avere luogo solo se è possibile scegliere dati di partenza vicini quanto si vuole l'uno all'altro, cioè se si possono considerare posizioni e velocità *simultaneamente* vicine le une alle altre quanto si vuole. Ora questo ci è proibito proprio dal principio caratteristico della fisica quantistica, il principio di indeterminazione dovuto a Heisenberg. Esso afferma infatti che è *impossibile* misurare (sinonimo di determinare) *simultaneamente* posizione e velocità di un punto mobile con precisione superiore al valore della costante di Planck, grandezza da considerarsi *non trascurabile per definizione* in regime quantistico, mentre lo è sicuramente nel regime classico.

Questa ostruzione concettuale ha impedito finora l'estensione al caso quantistico delle nozioni matematiche profonde e sottili elaborate nella teoria classica dei sistemi caotici, cosicché la teoria del caos quantistico si può considerare a tutt'oggi più una raccolta di metodi fenomenologici, di tentativi e di risultati parziali che un *corpus* sistematico e organizzato come quella del caos «classico». Sembra comunque stabilito, almeno empiricamente, cioè principalmente tramite esperimenti numerici, e per sistemi composti da un numero finito (piccolo) di componenti, il fenomeno della cosiddetta «soppressione quantistica del caos classico». Ciò significa che l'evoluzione quantistica dei sistemi che classicamente danno origine a moti caotici diventa ricorrente se la si osserva per tempi sufficientemente lunghi. In altri termini, l'evoluzione classica e quella quantistica del medesimo sistema sembrano avere aspetti qualitativamente simili solo nel transiente: sul lungo periodo la prima può diventare caotica mentre la seconda rimane ricorrente.

Una possibile via di uscita, suggerita recentemente da B.V. Chirikov e indipendentemente da G. Jona-Lasinio, è quella di «tornare alle origini», cioè di esaminare l'evoluzione quantistica dei sistemi ad un numero grandissimo di costituenti, come il gas perfetto in tutte le sue molti varianti, inclusa quella di Boltzmann, o i sistemi di oscillatori. In questo caso le considerazioni che sembrano imporre il comportamento ricorrente ai sistemi con pochi costituenti non valgono più, e compare la possibilità tanto di definire in maniera consistente il comportamento caotico quantistico quanto quella di determinare la sua effettiva esistenza. Ricerche in questo campo sono in corso solo da pochissimo tempo, e i primi risultati sembrano andare nella direzione dell'effettiva esistenza di caos quantistico per alcuni sistemi ad un numero infinito di gradi di libertà.

SUGGERIMENTO BIBLIOGRAFICO: si consiglia vivamente a coloro che fossero interessati ad approfondire gli argomenti di questo articolo (meglio se in possesso dei rudimenti del calcolo differenziale e integrale) la lettura delle voci «Meccanica statistica classica», «Insiemi statistici», «Equipartizione e critica della meccanica statistica classica», «Moto browniano», «Entropia ed informazione», «Teoria ergodica», «Caos», redatte da G. Gallavotti, nel *Dizionario delle Scienze Fisiche* dell'Istituto dell'Enciclopedia Italiana.